Chapitre 23 : Intégration – Feuille n°2

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^n}$

1. a) En remarquant que $\forall x \in [0;1]$, $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, calculer I_1.

b) Que vaut I_2 ?

2. a) Etudier la monotonie de la suite (I_n).

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{2}$.

c) La suite (I_n) est-elle convergente ?

3. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq \int_0^1 x(1-x^n)dx$. Déterminer alors $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 2 Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

$I = \int_1^3 (2t+1)e^{2t}dt$ $\qquad$ $J = \int_1^2 (t^2 - t + 1)\ln(t)dt$

$K = \int_1^e \ln(t)dt$ $\qquad$ $L = \int_0^1 (t^2 + t)e^{-t}$

Exercice 3 On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$

1. Déterminer I_0.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
3. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
4. Déduire des questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
5. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$, puis, à l'aide de la question 3, donner un équivalent simple de I_n.

Exercice 4

A l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 \frac{-x+3}{x+2}dx$ $(t = x + 2)$ $\qquad$ $B = \int_1^3 \frac{1}{t+\sqrt{t}}dt$ $(t = u^2)$

$C = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ $(v = e^x)$ $\qquad$ *(on pourra utiliser que :* $\frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}$ *)*

Exercice 5

On considère la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$.

On pose $\forall t \geq 0$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^3+1}}$. On appelle G une primitive de g.

1) a) Exprimer F en fonction de G.

b) Déterminer F' et étudier les variations de F.

2) a) Soit $x \in [0; +\infty[$. Encadrer g(t) sur l'intervalle $[x; x + 1]$

b) En déduire que $\forall x \geq 0$, $\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+1}} \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.