

## Chapitre 23 : Intégration – Feuille n°1

### Exercice 1

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln(x)$

Montrer que la fonction  $F(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$  est une primitive de  $f$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2x - 3)e^{-x}$ .

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que  $F(x) = (ax + b)e^{-x}$  soit une primitive de  $f$ .

### Exercice 2

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = (x + 1)(x + 2)$  sur  $\mathbb{R}$       b)  $f(x) = \frac{1}{x^4}$  sur  $]0; +\infty[$       c)  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$  sur  $]0; +\infty[$

d)  $f(x) = \frac{2}{(3x - 1)^2}$  sur  $] -\infty; \frac{1}{3}[$       e)  $f(x) = \frac{1}{3x + 4}$  sur  $] -\infty; -\frac{4}{3}[$       f)  $f(x) = e^{-2x}$  sur  $\mathbb{R}$

g)  $f(x) = xe^{-x^2}$  sur  $\mathbb{R}$       h)  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  sur  $\mathbb{R}$       i)  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$  sur  $]0; +\infty[$

j)  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^3}}$  sur  $] -1; +\infty[$       k)  $f(x) = x(x^2 - 1)^5$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 3** A l'aide de l'exercice 2, déterminer :

$$I_1 = \int_{-1}^1 (x + 1)(x + 2)dx \quad I_2 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx \quad I_3 = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$$

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$  par :  $f(t) = \frac{2t^3 + 6t^2 + 9t - 4}{(t + 1)^2(t - 2)}$

1) Déterminer des réels  $a, b, c$ , tels que :  $\forall t \neq -1, 2 \quad f(t) = a + \frac{b}{(t + 1)^2} + \frac{c}{t - 2}$

2) Déterminer  $I = \int_0^1 f(t)dt$

**Exercice 5** Etudier la monotonie des suites suivantes :

$$a_n = \int_0^n \exp(-t^2)dt \quad (n \in \mathbb{N}) \quad b_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1 + x^3} dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

**Exercice 6** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$ .

1) Vérifier que :  $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq \ln(1 + x) \leq x$ .

2) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$