

Chapitre 22 : Couples de variables aléatoires discrètes

1. Loi d'un couple de V.A.R. discrètes

1.1 Loi conjointe / Loïs conditionnelles

Définition :

Soient X et Y deux V.A.R.D. telles que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

On appelle loi (ou loi conjointe) du couple (X, Y) (ou loi conjointe) l'ensemble des $P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ où $i \in I, j \in J$.

Remarques :

_ On note parfois $p_{i,j} = P(X = x_i) \cap (Y = y_j)$.

_ On a toujours $\sum_{i \in I, j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i \in I, j \in J} p_{i,j} = 1$.

_ si I et J sont petits, on peut représenter la loi conjointe dans un tableau à double entrée.

Définition :

Pour $i \in I$, on appelle loi de Y conditionnée par $X = x_i$ (ou sachant X), l'ensemble des valeurs $P_{(X=x_i)}(Y = y_j)$, où $i \in I$ et $j \in J$.

Propriété : Lien loi conditionnelle/ loi conjointe

$\forall i \in I, \forall j \in J, P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P_{(X=x_i)}(Y = y_j)$

Remarque :

Pour déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) :

_ soit on exprime l'événement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ en fonction d'événements élémentaires

_ soit on utilise la probabilité conditionnelle.

_ soit on utilise l'indépendance de X et Y (si elles sont indépendantes) : voir paragraphe 1.3

Exemples :

1) Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules, l'une après l'autre et avec remise. Soit X le numéro de la première boule et Y la somme des numéros des deux boules.

$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ $Y(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Loi conjointe :

$X \setminus Y$	2	3	4	5	6
1	1/9	1/9	1/9	0	0
2	0	1/9	1/9	1/9	0
3	0	0	1/9	1/9	1/9

2) Une pièce a une probabilité de faire pile de $\frac{1}{3}$.

On lance cette pièce jusqu'à obtenir un deuxième pile.

Soit X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile.

Soit Y le nombre de lancers nécessaires (en tout) pour obtenir le deuxième pile.

$X(\Omega) = \{1, 2, \dots\}$ $Y(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$

$\forall j > i, (X = i) \cap (Y = j) = \text{"On obtient le premier pile au } i\text{-ème tirage et le deuxième au } j\text{-ème"} = F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{j-1} \cap F_j$

$$\text{Donc } P((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i+1} \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \frac{1}{9}$$

$$\forall j \leq i, P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$$

3) On lance 10 fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de piles effectués.

Puis on choisit au hasard un nombre entre 0 et X, qu'on note Y.

a) Quel est la loi de X ?

b) Pour tout $j \leq i$, déterminer $P_{(X=i)}(Y = j)$

c) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

a) Il y a 10 lancers indépendants. La probabilité de faire pile est 1/2 et X est le nombre de piles effectués. Donc $X \rightarrow B(10, 1/2)$.

$$\text{Donc } \forall i \in \{0, \dots, 10\}, P(X = i) = \binom{10}{i} \frac{1}{2^{10-i}} \frac{1}{2^i} = \binom{10}{i} \frac{1}{2^{10}}$$

b) Sachant $(X = i)$, Y suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, i\}$. Donc $P_{(X=i)}(Y = j) = \frac{1}{i+1}$ si $j \leq i$

$$\text{c) Donc } P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i) P_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} \binom{10}{i} \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{i+1} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

1.2 Lois marginales

Définition :

Si (X,Y) est un couple de V.A.R., les lois des V.A.R. X et Y sont appelées lois marginales.

Remarques :

_ Chercher les lois marginales, c'est donc chercher $P(X = x_i)$ pour $i \in I$ et $P(Y = y_j)$ pour $j \in J$.

_ On note souvent $p_{i,.} = P(X = x_i)$ $p_{.,j} = P(Y = y_j)$.

_ quand la loi conjointe est présentée dans un tableau, les lois marginales s'écrivent dans les marges !

Propriété : Lien loi conjointe ou conditionnelle / loi marginale (Formule des probabilités totales)

$$\forall i \in I, P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} P(Y = y_j) P_{(Y=y_j)}(X = x_i)$$

$$\forall j \in J, P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i \in I} P(X = x_i) P_{(X=x_i)}(Y = y_j).$$

.

$$\text{Autrement dit, } \forall i \in I, p_{i,.} = \sum_{j \in J} p_{i,j} \quad \forall j \in J, p_{.,j} = \sum_{i \in I} p_{i,j}$$

Exemples (suite des exemples précédents) : 1)

$X = x \backslash Y$	2	3	4	5	6	$p_{i,.}$
1	1/9	1/9	1/9	0	0	1/3
2	0	1/9	1/9	1/9	0	1/3
3	0	0	1/9	1/9	1/9	1/3
$p_{.,j}$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9	1

2) Loi marginale de X : on voit que $X \rightarrow G(1/3)$.

Loi marginale de Y : ($j > i \Leftrightarrow i < j$)

$\forall j \geq 2,$

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=1}^{j-1} P((X = i) \cap (Y = j)) + \sum_{i=j}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \frac{1}{9} + 0 = (j-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \frac{1}{9} \end{aligned}$$

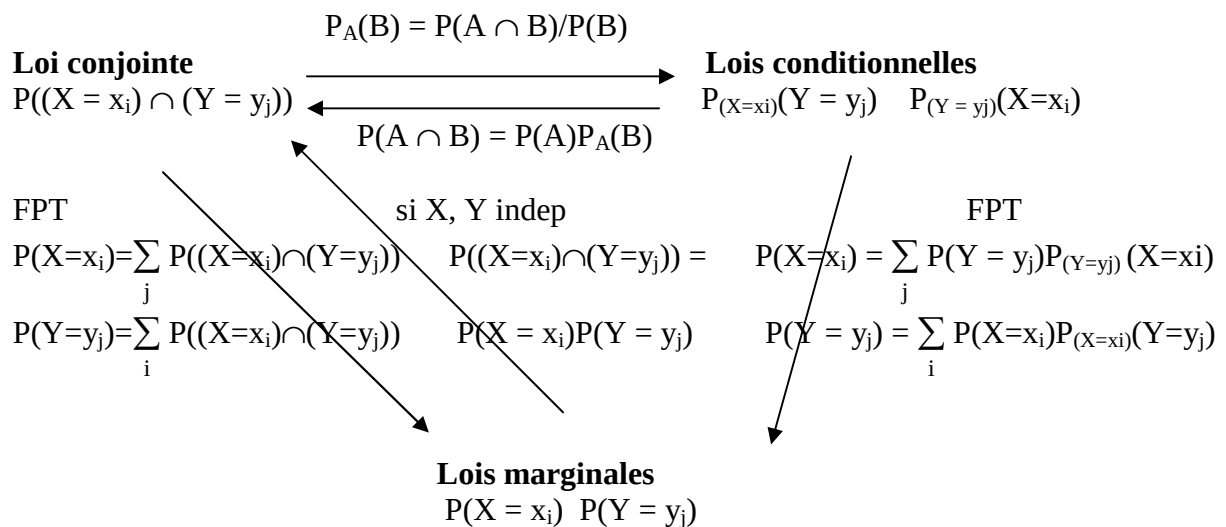
1.3 Variables aléatoires indépendantes

Définition : Si $\forall i \in I$ et $\forall j \in J$, $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$, on dit que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

Remarque : autrement dit, X et Y sont indépendantes si et seulement si les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants $\forall i \in I, \forall j \in J$.

Exemple : $P((X = 2) \cap (Y = 2)) = 0 \quad P(X = 2)P(Y = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$. X et Y ne sont pas indépendantes.

Conclusion



2. Exemples d'utilisation d'un couple de V.A.R.D.

Dans toute cette partie, on considère des V.A.R.D. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2.1 $P(X = Y)$

Introduction Soient X et Y deux VARD telles que $X(\Omega) = \{1,2,3\}$ et $Y(\Omega) = \{1,2,3\}$
 $P(X = Y)$?

$$(X = Y) = ((X = 1) \cap (Y = 1)) \cup ((X = 2) \cap (Y = 2)) \cup ((X = 3) \cap (Y = 3)) \\ = \bigcup_{i=1}^3 ((X = i) \cap (Y = i))$$

$$\text{Donc } P(X = Y) = \sum_{k=1}^3 P((X = k) \cap (Y = k))$$

Propriété :

Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{i \in I\}$.

Alors $(X = Y) = \bigcup_{i \in I} ((X = i) \cap (Y = i))$ et

$$P(X = Y) = \sum_{i \in I} P((X = i) \cap (Y = i))$$

Exemple :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre p . $P(X = Y)$?

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p q^{k-1} p \\ = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = p^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} (q^2)^{k'} = p^2 \times \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2}{1 - (1 - p)^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2 - p}$$

Remarque :

$$P(X < Y) = \sum_{i \in I, j \in J, i < j} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i \in I} P((X = i) \cap (Y > i))$$

2.2 Loi de $\max(X, Y)$

Généralité

Soient X et Y deux V.A.R.D. telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On pose $Z = \max(X, Y)$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $(Z \leq k)$ signifie que $(X \leq k)$ et $(Y \leq k)$.

Donc $P(Z \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k))$.

Exemple :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre p . On pose $Z = \max(X, Y)$.

Déterminer $P(Z \leq k)$ (pour $k \geq 2$) puis la loi de Z

loi de Z ?

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall k \geq 1, P(Z \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) = P(X \leq k)P(Y \leq k)$$

Or $P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - q^k$ (les k premiers sont des échecs)

De même $P(Y \leq k) = 1 - q^k$

Donc $P(Z \leq k) = (1 - q^k)^2$

$$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$$

Remarque : On obtient des résultats analogues pour le minimum de plusieurs variables aléatoires en utilisant $P(Z \geq k)$.

2.3 Loi de $X + Y$

Introduction Soient X et Y deux VARD telles que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

On pose $Z = X + Y$. Loi de Z ?

$$Z(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(Z = 2) = (X = 1) \cap (Y = 1) \quad (Z = 3) = ((X = 1) \cap (Y = 2)) \cup ((X = 2) \cap (Y = 1))$$

$$(Z = 4) = ((X = 1) \cap (Y = 3)) \cup ((X = 2) \cap (Y = 2)) \cup ((X = 3) \cap (Y = 1)) \dots$$

De manière générale

$$\begin{aligned} (Z = k) &= ((X = 1) \cap (Y = k - 1)) \cup ((X = 2) \cap (Y = k - 2)) \cup \dots \cup ((X = k - 1) \cap (Y = 1)) \\ &= \bigcup_{i=1}^{k-1} ((X = i) \cap (Y = k - i)) \end{aligned}$$

Propriété :

Soient X et Y deux V.A.R. avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}, P(X + Y = k) = \sum_{i \text{ app } X(\Omega) \text{ tel que } k - i \in Y(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = k - i))$$

Remarques :

_ Rappel : Si X et Y admettent des espérances $E(X)$ et $E(Y)$, alors $Z = X + Y$ admet une espérance et $E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

_ Il faut écrire une décomposition similaire pour la loi de $Y - X$.

$$(Y - X = k) = \bigcup ((X = i) \cap (Y = k + i))$$

Exemple :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre p . On pose $Z = X + Y$. loi de Z ?

$$Z(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$$

$$\forall k \geq 2, (Z = k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} ((X = i) \cap (Y = k - i)) \text{ donc}$$

$$P(Z = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((X = i) \cap (Y = k - i))$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1} p q^{k-i-1} p = \sum_{i=1}^{k-1} p^2 q^{k-2} = (k-1) p^2 q^{k-2}$$