

Chapitre 22 : Couples de V.A.R.D. : Feuille n°2

Exercice 1

Soit $n \geq 1$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

- 1) a) Rappeler l'espérance et la variance de X et de Y .
- b) Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, déterminer $P(X \leq k)$ et $P(Y \leq k)$.
- c) Déterminer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.
- 2) On pose $M = \max(X, Y)$
- a) Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, déterminer $P(M \leq k)$.
- b) En déduire la loi de M .
- c) Déterminer $E(M)$.

Exercice 2

On lance en même temps trois dés notés D_1, D_2, D_3 .

Lorsqu'on fait "6" avec un dé, on le met de côté et on continue avec les autres.

On s'arrête quand chacun des trois dés a obtenu "6".

Soit T_1 , (respectivement T_2, T_3) la variable aléatoire indiquant le numéro du jet, où, pour la première fois, "6" apparaît sur le dé D_1 (respectivement D_2, D_3).

Soit N le nombre total de jets (un jet étant le lancer de un ou plusieurs dés)

- 1) a) Reconnaître la loi de T_1, T_2 et T_3 .
 - b) Pour tout $k \geq 0$, déterminer $P(T_1 \leq k), P(T_2 \leq k), P(T_3 \leq k)$.
 - 2) Exprimer $(N \leq k)$ en fonction des événements $(T_1 \leq k), (T_2 \leq k), (T_3 \leq k)$.
- En déduire $P(N \leq k)$ pour $k \geq 0$, puis $P(N = k)$ pour $k \geq 1$.

Exercice 3

Soit $p \in]0;1[$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p . On pose $Z = \min(X, Y)$. (on pourra poser $q = 1 - p$).

- 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(Z > k)$.
- 2) En déduire la loi de Z . (on reconnaîtra une loi usuelle).

Exercice 4

Soient X_1 et X_2 deux V.A.R. indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$. Soit $X = X_1 + X_2$.

Montrer que X suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre
(on pourra dans le calcul faire apparaître la formule du binôme de Newton).

Exercice 5

Soit $p \in]0;1[$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p . On pose $Z = Y - X$.

- a) Déterminer $Z(\Omega)$.
- b) Soit $k \in \mathbb{N}$.
Exprimer l'événement $(Z = k)$ comme une réunion d'événements du type $(X = \dots) \cap (Y = \dots)$.
En déduire $P(Z = k)$ pour $k \geq 0$.
- c) En déduire $P(Z \geq 0)$.