

Chapitre 22 : Couples de V.A.R.D. - Feuille n°1

Exercice 1

Une urne contient 2 boules bleues et 2 boules rouges.

On tire simultanément 2 boules de cette urne, et on note X_1 le nombre de boules bleues tirées.

On replace ces deux boules, puis on en retire deux simultanément.

On note X_2 le nombre de boules bleues tirées en tout.

- 1) Déterminer la loi de X_1
- 2) Calculer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) . (on présentera le résultat sous la forme d'un tableau.)
- 3) Déterminer la loi de X_2 .

Exercice 2

Soient X et Y deux V.A.R. telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{\sqrt{e} j! 2^{i+j+1}}$$

- 1°) a) Déterminer la loi de X .
- b) On pose $X' = X + 1$. Déterminer la loi de X' et reconnaître cette loi.
- 2) Déterminer la loi marginale de Y et la reconnaître.
- 3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 Un péage comporte 3 guichets numérotés de 1 à 3. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 minute. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet n°1.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X = k)$, pour $0 \leq k \leq n$ et pour $k > n$.

2. Justifier que $P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X = k) P(N = n)$.

3. En posant $n' = n - k$, montrer que $P(X = k) = e^{-6} \frac{2^k}{k!} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{1}{n'!} 4^{n'}$.

4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle). En déduire $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 4 Des objets en nombre illimité sont placés successivement dans trois cases (A, B, C) dont la capacité est illimitée. Au départ, les cases sont vides. On suppose qu'à chaque fois qu'un objet est placé, la probabilité pour qu'il le soit dans une case donnée est égale à $\frac{1}{3}$.

Soit X le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, deux cases exactement sont occupées par au moins un objet.

Soit Y le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, les trois cases contiennent chacun au moins un objet. X et Y sont deux variables aléatoires.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de X . Déterminer $Y(\Omega)$.
- 2) a) Pour $i \geq 2$ et $j \geq 3$, montrer que $P_{(X=i)}(Y = j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1} \frac{1}{3}$ si $j > i$
Que devient ce résultat pour $j \leq i$?
- b) En déduire que pour tout $j \geq 3$, $P(Y = j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} - \frac{2}{3^{j-1}}$