

1. Généralités

1.1 Définition d'une V.A.R.D./ Loi de probabilité

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé.

Une variable aléatoire discrète réelle est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que :

- 1) on peut écrire $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, où I est une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.
- 2) $\forall i \in I, (X = x_i) \in \mathcal{T}$.

Définition : Soit X une V.A.R.D.

On appelle loi de probabilité de X la donnée de $X(\Omega)$ et de $P(X = x_i)$, pour tout $x_i \in X(\Omega)$.

Remarques :

- _ Si I est infini, on ne présente pas les résultats dans un tableau, mais par une formule.
- _ attention à bien repérer la définition de la V.A.R. X ("X est le nombre de..."), qui permet de trouver sa loi.
- _ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on note simplement $P(X = i)$ au lieu de $P(X = x_i)$
- _ Pour déterminer $P(X = x_i)$ ou $P(X = i)$, il faut en général décomposer l'événement à l'aide des événements élémentaires.

Exemple :

On lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$$

Si on note S_k l'événement "On obtient 6 au k-ème lancer"

$$\text{Pour } k \geq 1, P(X = k) = P(\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Propriété : Soit X une V.A.R.D. telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$

Alors la famille $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de Ω .

En particulier, on a donc : $\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1.$

Ex : Vérifions dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} &\text{ converge car } -1 < \frac{5}{6} < 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \\ &= (k' = k - 1) \frac{1}{6} \sum_{k'=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k'} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1 \end{aligned}$$

Propriété (admise) : Si X et Y sont des V.A.R. discrètes et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λX , $X + Y$, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$, XY sont des V.A.R. discrètes.

1.2 Fonction de répartition

Définition : Soit X une V.A.R. discrète.

On appelle fonction de répartition de X l'application : $F_X \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto P(X \leq x) \end{cases}$

Propriété

Soit X une V.A.R.D. et F_X sa fonction de répartition.

- 1) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$, $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- 2) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration :

- 1) $(X \leq b) = (X \leq a) \cup (a < X \leq b)$ (disjoints) donc $P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$

$$F_X(b) = F_X(a) + P(a < X \leq b)$$

- 2) si $b \geq a$, $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b) \geq 0$ donc F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

- 3) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1 (car probabilité) donc elle admet une limite L en $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $A_n = (X \leq n)$. Alors $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1} \\ \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega \end{cases}$

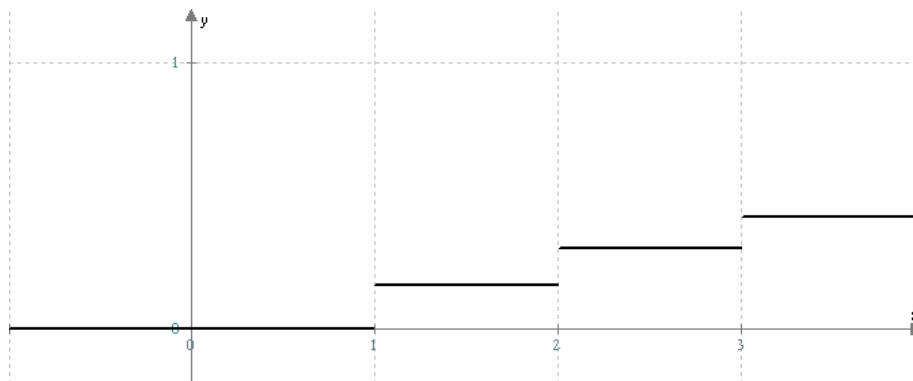
Donc d'après la propriété de la limite monotone, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(\Omega) = 1$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n) = L$ donc $L = 1$

De même en $-\infty$.

Exemple : avec $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$

$$F_X(x) = \begin{cases} = 0 & \text{si } x < 1 \\ = P(X = 1) = \frac{1}{6} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216} & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \\ = \dots \end{cases}$$



Propriété : Si X est une V.A.R.D. telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors

$$1) \forall k \in \mathbb{N}, F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k P(X = i)$$

$$2) \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = F_X(k) - F_X(k-1)$$

Rappel : Pour une V.A.R. définie comme un maximum, il est souvent utile de déterminer d'abord $P(X \leq k)$, puis $P(X = k)$. (idem avec $P(X \geq k)$ si $X = \text{minimum}$).

1.3 Espérance d'une V.A.R.D.

Définition :

Soit X une VARD telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$

Si la série $\sum x_i P(X = x_i)$ est absolument convergente, on dit que X admet une espérance.

Dans ce cas, on appelle espérance de X , le réel $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$

Remarques :

_ Dans la plupart des cas $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Donc $\forall i \in I, i \times P(X = i) \geq 0$.

Donc la série $\sum i P(X = i)$ est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.

_ si vous trouvez $E(X) = 1$ vérifiez que vous n'avez pas calculé $\sum P(X = i)$

Exemple :

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots\} \quad P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

X est à valeurs positives donc absolue convergence $\Leftrightarrow$ convergence

$$\sum k P(X = k) = \frac{1}{6} \sum k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \quad -1 < \frac{5}{6} < 1 \text{ donc la série converge.}$$

$$\text{Donc } X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6} \times 36 = 6$$

Théorème de transfert :

Soit X une VARD, $(X(\Omega) = \{x_i, i \in I\})$ et g une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On pose $Y = g(X)$.

Si la série $\sum_i g(x_i) P(X = x_i)$ converge absolument, alors la VARD Y admet une espérance et

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$$

Exemple :

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots\} \quad P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

On pose $Y = \frac{1}{2}X$. Montrer que Y admet une espérance et calculer $E(Y)$.

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} P(X = k) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{12} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} = \frac{1}{12} \sum_{k' \geq 0} \left(\frac{5}{12}\right)^{k'}$$

$-1 < \frac{5}{12} < 1$ donc la série est absolument convergente.

$$\text{Donc } Y \text{ admet une espérance et } E(Y) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{1}{12} \times \frac{12}{7} = \frac{1}{7}$$

Propriété : Linéarité de l'espérance

_ Soit X une VARD et a et b deux réels.

Si X admet une espérance, alors $Y = aX + b$ admet une espérance et $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$

_ Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires qui admettent chacune une espérance, alors $X = X_1 + \dots + X_n$ admet une espérance et $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$.

1.4 Moment d'ordre r

Définition

Soit X une VARD Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X^r admet une espérance, on dit que X admet un moment d'ordre r. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r le réel $E(X^r)$

Remarque : Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, d'après le théorème de transfert, on sait que si elle existe,

$$E(X^r) = \sum_{i \in I} x_i^r P(X = x_i).$$

Exemple :

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots\} \quad P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \quad E(X^2) ?$$

$$\sum k^2 P(X = k) = \sum k^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum (k(k-1) + k) \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{5}{36} \sum k(k-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} + \frac{1}{6} \sum k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \quad -1 < \frac{5}{6} < 1 \text{ donc les séries convergent.}$$

$$E(X^2) \text{ existe et } E(X^2) = \frac{5}{36} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5}{36} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{5}{36} \times 2 \times 6^3 + \frac{1}{6} \times 6^2 = 60 + 6 = 66$$

1.5 Variance d'une VARD

Définition Soit X une VARD.

Si $E((X - E(X))^2)$ existe, on dit que X admet une variance, et dans ce cas on appelle variance de X le nombre réel $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : Une variance est toujours positive.

Propriété (Formule de Huygens) : Soit X une V.A.R.D.

Si X^2 admet une espérance, alors X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Exemple :

X = nombre de lancers pour obtenir un 6.

On a vu que $E(X) = 6$ $E(X^2) = 66$.

Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 66 - 36 = 30$

Propriété : Soit X une V.A.R.D qui admet une variance $V(X)$. Soit $Y = aX + b$.

Alors Y admet une variance et $V(Y) = a^2V(X)$ et $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$

Définition :

Soit X une V.A.R.D. On dit que X est une variable aléatoire centrée si $E(X) = 0$
réduite si $\sigma(X) = 1$.

Propriété : Soit X une V.A.R.D. d'espérance m et d'écart-type σ

Alors $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

Démonstration : $Y = \frac{1}{\sigma} X - \frac{m}{\sigma}$ $E(Y) = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{m}{\sigma} = \frac{m}{\sigma} - \frac{m}{\sigma} = 0.$ $\sigma(Y) = \left| \frac{1}{\sigma} \right| \sigma(X) = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$

2. Loïs usuelles

2.1 Loi géométrique

Définition :

Soit X une VARD telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

S'il existe $p \in]0,1[$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^* P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$, alors on dit que X suit la loi géométrique de paramètre p . On note $X \longrightarrow G(p)$.

Propriété :

On considère une épreuve de Bernoulli de succès S paramètre p .

On répète cette épreuve de manière indépendante jusqu'à obtenir S . On note X le nombre d'essais nécessaires. Alors $X \longrightarrow G(p)$.

Démonstration :

$$(X = k) = \overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k.$$

Les épreuves étant indépendantes, on a : $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$

Donc X suit la loi géométrique de paramètre p .

Propriété :

Soit X une VARD qui suit la loi géométrique de paramètre p . Soit $q = 1 - p$.

$$\text{Alors } E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Démonstration :

$$\sum kP(X = k) = \sum k(1 - p)^{k-1}p \text{ et } 0 < 1 - p < 1 \text{ donc la série converge et}$$

$$E(X) = p \sum_{k=0}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1} = p \times \frac{1}{(1 - (1 - p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\sum k^2P(X = k) = \sum k(k - 1)(1 - p)^{k-1}p + \sum k(1 - p)^{k-1}p$$

$$= p(1 - p) \sum k(k - 1)(1 - p)^{k-2} + p \sum k(1 - p)^{k-1}$$

$0 < 1 - p < 1$ donc les séries convergent et

$$E(X^2) = p(1 - p) \frac{2}{(1 - (1 - p))^3} + \frac{p \cdot 1}{(1 - (1 - p))^2} = \frac{2 - 2p}{p^2} + \frac{p}{p^2} = \frac{2 - p}{p^2}$$

$$\text{Donc } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2 - p}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1 - p}{p^2}$$

Exemple :

On lance un dé jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers nécessaires.

"Obtenir 6" est une épreuve de Bernoulli de probabilité $p = \frac{1}{6}$.

Les lancers sont indépendants et X est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un succès. Donc X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \quad E(X) = \frac{1}{1/6} = 6 \quad V(X) = \frac{5}{\frac{1}{36}} = 30 \quad \sigma(X) = \sqrt{30}$$

Remarque :

si $X \rightarrow G(p)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(X > k) = \text{"les } k \text{ premiers essais sont des échecs"}$

donc $P(X > k) = (1 - p)^k$

2.2 Loi de Poisson

Définition :

Soit X une VAR telle que : 1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

2) il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Alors on dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ .

Vérifions que $\sum P(X = k)$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$

$$\sum P(X = k) = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^k}{k!} \quad (\text{série exponentielle})$$

Donc la série converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^{-\lambda + \lambda} = 1$.

Propriété

Si $X \rightarrow P(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Démonstration :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^N kP(X = k) = \sum_{k=0}^N \frac{k\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = (k'=k-1) e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{N-1} \frac{\lambda^{k'+1}}{k'!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{N-1} \frac{\lambda^{k'}}{k'!}$$

La série converge donc X admet une espérance et $E(X) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N k^2 P(X = k) &= \sum_{k=0}^N \frac{k^2 \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^N \frac{k(k-1)\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^N \frac{k\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ \sum_{k=0}^N \frac{k(k-1)\lambda^k}{k!} &= \sum_{k=2}^N \frac{k(k-1)\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^N \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = (k'=k-2) \sum_{k'=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k'+2}}{k'!} = \lambda^2 \sum_{k'=0}^{N-2} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} \end{aligned}$$

Donc cette série converge vers $\lambda^2 e^{\lambda}$

On a déjà montré que la deuxième série convergeait vers λ .

Donc $\sum_k k^2 P(X = k)$ converge vers $\lambda^2 + \lambda$. Donc $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$.

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}$.

Cas d'application : la loi de Poisson est aussi appelée "Loi des événements rares".
 On verra en deuxième année qu'on peut approcher la loi binomiale $B(n,p)$ quand p est très petit, et n très grand par la loi de Poisson $P(\lambda)$ en posant $\lambda = n \times p$. ($p \leq 0,1$, $n \geq 30$, $np < 15$)

Exemple :

Une entreprise produit des pots de confiture. Chaque pot a un risque de 0,2% d'être avarié.
 On choisit un lot de 1000 pots, et on note X le nombre de pots avariés.

On a donc $X \rightarrow B(1000, 0.002)$.

Dans ce cas $P(X = 3) = \binom{1000}{3} 0.002^3 0.998^{997} \approx 0,1806$

Si on considère que $X \rightarrow P(2)$ $P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} \approx 0,1804$

Conclusion : A retenir

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Poisson $P(\lambda)$		$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Géométrique $G(p)$	épreuves de Bernoulli indépendantes $X =$ premier succès	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$