Chapitre 21 : V.A.R. discrètes - Feuille n°3

Exercice 1 *(Variable sans mémoire)*
Soit X une V.A.R. prenant toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$.

1) On considère dans cette question que X suit la loi géométrique G(p).
a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X > k)$
b) Montrer que pour tous $(k, m) \in \mathbb{N}^{*2}$, $P_{(X > k)}(X > k + m) = P(X > m)$.

2) Réciproquement, supposons que X soit une VAR telle que :
$\forall (k, m) \in \mathbb{N}^2$, $P_{(X > k)}(X > k + m) = P(X > m)$ et que $P(X = 1) \in]0;1[$.
On ne suppose plus ici que X suit la loi géométrique.
a) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X > k + 1) = P(X > k)P(X > 1)$
b) On pose $u_k = P(X > k)$ et $p = P(X = 1)$. Montrer que $u_{k+1} = u_k(1 - p)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
En déduire $P(X > k)$ en fonction de k et de p.
c) Pour $k \geq 1$, exprimer $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k - 1)$ et $P(X > k)$.
En déduire la loi de X.

Exercice 2
On considère une pièce dont la probabilité de faire pile est $\frac{1}{4}$ et un entier $N \geq 1$.
On lance cette pièce jusqu'à obtenir le N-ème pile.
On note T_1 le nombre de lancers pour obtenir le premier pile, T_2 le nombre de lancers <u>supplémentaires</u> pour obtenir le deuxième pile, etc…
On note T le nombre de lancers nécessaires en tout.
Exemple : Pour la séquence FFPFP… $T_1 = 3$ et $T_2 = 2$

1) a) Reconnaître la loi de T_1 et déterminer $E(T_1)$.
b) Pour $i \in \{2, \dots, N\}$, quelle est la loi de T_i ? Déterminer $E(T_i)$.
2) Exprimer T en fonction de $T_1, \dots, T_N$. Déterminer E(T).

Exercice 3
Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ et soit α un réel strictement positif. Montrer que la variable $Y = \alpha^X$ admet une espérance et la calculer.