

Chapitre 21 : V.A.R. discrètes - Feuille n°1

Exercice 1

Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules vertes.

On tire une boule en la remettant à chaque fois, jusqu'à obtenir une boule verte.

On note X le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X .

Exercice 2

On considère une pièce dont la probabilité de faire pile est $p \in]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.

On lance une fois la pièce, on note le résultat, puis on relance la pièce jusqu'à obtenir un résultat différent du premier. On note X le nombre de lancers nécessaires en tout.

Par exemple : Pour la séquence PPPF, on obtient $X = 4$.

Déterminer $X(\Omega)$. Pour $k \in X(\Omega)$, exprimer l'événement $(X = k)$ en fonction d'événements élémentaires, et en déduire la loi de X .

Exercice 3 (on admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$)

Une urne contient au départ une boule blanche.

On lance plusieurs fois une pièce équilibrée.

Tant qu'on obtient "Face", on ajoute une boule noire dans l'urne et on relance la pièce.

Lorsqu'on obtient "Pile", on tire une boule de l'urne et on s'arrête.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne au moment du tirage.

On note B l'événement "On obtient la boule blanche au tirage"

1) Déterminer $P(X = n)$ pour tout $n \geq 1$.

2) a) Pour tout $n \geq 1$, déterminer $P_{(X=n)}(B)$

b) Quelle est la probabilité qu'on obtienne une boule blanche ?

Exercice 4

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à $2/3$ tandis que celle de faire face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois, de deux piles consécutifs.

Ainsi, au cours des lancers PFFPFPP..., on a $X = 7$.

Soit n un entier naturel non nul, on note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$.

1) Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$. Déterminer p_1 , p_2 , p_3 , p_4 .

2) En distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que :

$$\forall n \geq 3, p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}.$$

3) En déduire la loi de X .