Chapitre 20 : Espaces probabilisés infinis

Introduction :
On lance une pièce jusqu'à ce qu'on obtienne pile, et on note X le numéro de ce lancer
$X(\Omega) = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$
Il y a un nombre infini de possibilités.

Remarque générale : Cas classique
On répète une même épreuve jusqu'à obtenir un succès. On s'arrête au premier succès.
Alors, si $k \geq 1$, on s'arrête au k-ème essai si et seulement si les k-1 premiers essais sont des échecs et le k-ème essai est un succès.

1 Définition d'une tribu

Définition :
Soit Ω un ensemble.
On appelle tribu de parties de Ω tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $P(\Omega)$ tel que :
1) $\Omega \in \mathcal{T}$
2) $\forall A \in \mathcal{T}, \overline{A} \in \mathcal{T}$. (stabilité par passage au complémentaire)
3) Si I est une partie de $\mathbb{N}$, et si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$
alors $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$. (stabilité par union dénombrable)

Remarques :
_ $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω. C'est presque toujours la tribu qu'on étudie.
_ Les éléments d'une tribu sont appelés des événements
_ On peut montrer que une intersection dénombrable d'événements est un événement

2. Probabilité sur une tribu

(Oral) Rappel : Si Ω est un ensemble fini, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
1) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), 0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Si A et B sont deux événements incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application P de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
1) $\forall A \in T, 0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de T deux à deux incompatibles, alors :
$\sum P(A_n)$ converge et $P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$
Dans ce cas le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Exemple : On lance un dé équilibré et on s'arrête quand on fait un 5 ou un 6.
On note le nombre de lancers. Les lancers sont indépendants.
$\Omega = \{1,2,\dots\} = \mathbb{N}^*$. Soit A_k = "on a lancé k fois le dé pour faire 5 ou 6"

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_k) = \frac{4}{6} \times \ldots \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}$

Soit B = "On a lancé le dé un nombre pair de fois".

$B = A_2 \cup A_4 \cup A_6 \ldots \quad B = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} A_{2k}$

Les événements (A_{2k}) sont incompatibles, donc

$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{2k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{5} - 1\right) = \frac{2}{5}$$

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Soit $A \in \mathcal{T}$.

Si $P(A) = 0$ on dit que A est un ensemble négligeable.

Si $P(A) = 1$ on dit que A est presque sur.

Exemple : Suite de l'exemple précédent.

Soit A = "Le jeu se termine" $\quad A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$ (éléments disjoints)

$$\text{Donc } P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3} = (n' = n-1)\ \frac{1}{3} \sum_{n'=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n'} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

Le jeu se termine presque sûrement.

3 Propriétés d'une probabilité

Les formules valables pour une probabilité sur un ensemble fini restent valables pour un ensemble quelconque :

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et donc $P(\emptyset) = 0$

Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et de manière générale, la formule du crible

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n événements incompatibles, $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Propriété de la limite monotone :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$), alors la suite $P(A_n)$ converge et $P(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.

2) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite décroissante d'événements (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $P(A_n)$ converge et $P(\cap_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.

Exemple : Suite de l'exemple précédent.

Pour tout $n \geq 1$, soit C_n = "le jeu continue après n lancers"

Soit C = "le jeu ne s'arrête jamais"

$C_n = \overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_n} \quad p(C_n) = \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$C = C_1 \cap C_2 \cap \ldots = \cap_{n=1}^{+\infty} C_n$
De plus $C_{n+1} \subset C_n$ la suite (C_n) est décroissante (au sens de l'inclusion).
Donc $p(C) = \lim\limits_{n \to +\infty} p(C_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $p(C) = 0$. C est négligeable.
Le jeu se termine presque sûrement.

Remarque : Probabilité d'une union infinie $\cup_{n=0}^{+\infty} A_n$:

_ si les (A_n) sont incompatibles : $P(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

_ si les (A_n) sont inclus les uns dans les autres ($A_n \subset A_{n+1}$) $P(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$

Propriété : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements.
Alors la suite $P(\cup_{k=1}^{n} A_k)$ converge vers $P(\cup_{k \in \mathbb{N}} A_k)$
la suite $P(\cap_{k=1}^{n} A_k)$ converge vers $P(\cap_{k \in \mathbb{N}} A_k)$

4 Probabilités conditionnelles

La définition d'une probabilité conditionnelle et la formule des probabilités composées restent vraies.
On peut généraliser la notion de système complet d'événements :

Définition
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements tels que :
1) $\forall\ i \in \mathbb{N}$, $P(A_i) \neq 0$
2) $\forall\ i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
3) $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$ Alors on dit que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Propriété : Formule des probabilités totales
Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements

Alors $\forall\ B \in \mathcal{T}$, les séries $\sum P(A_i)P_{A_i}(B)$ et $\sum P(A_i \cap B)$ convergent

et $P(B) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(A_i)P_{A_i}(B) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(A_i \cap B)$