Chapitre 2 : Les polynômes

1. Les polynômes de degré 2

1.1 Définition et courbe

Définition : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. f est une fonction polynôme de degré 2 s'il existe des réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Propriété : La courbe d'une fonction polynome du second degré est une parabole.
Si $a > 0$, la parabole est "tournée vers le haut", si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.
(dessin)

1.2 Mise sous forme canonique

Principe : Mettre le polynôme sous une forme plus facile à étudier, avec un seul 'x' dans l'expression.

Méthode (à savoir refaire sur un exemple)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ (on factorise par $a \neq 0$)

Comme $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, (égalité remarquable ayant les 2 mêmes premiers termes)

$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$.

$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$

$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$

Cette dernière forme est appelée forme canonique de f.
Elle permet l'étude des racines, de la factorisation et du signe d'un polynôme du second degré.

Exemple : $f(x) = -3x^2 + 4x + 6 = -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x - 2\right)$

$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$ donc $f(x) = -3\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{18}{9}\right) = -3\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{22}{9}\right)$

Définition : Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

Donc $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

1.3 Racines et factorisation d'un polynôme du second degré

On distingue 3 cas :

1) si $\Delta > 0$: $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$

dans ce cas, $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{- b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{- b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc les racines de f sont les réels $x_1 = \frac{- b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{- b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans ce cas, la forme factorisée de f est : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

2) si $\Delta = 0$: dans ce cas, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = - \frac{b}{2a}$

Donc f a une seule racine qui est : $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on peut factoriser f sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$

3) si $\Delta < 0$: dans ce cas, $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ pour tout x.

Donc f n'a pas de racines. On ne peut pas factoriser f.

Conclusion : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$, f a deux racines $x_1 = \frac{- b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{- b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $f(x) = a(x-x_1)(x- x_2)$.

Si $\Delta = 0$, f a une racine double $x_0 = - \frac{b}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Si $\Delta < 0$, f n'a pas de racine et n'est pas factorisable.

Exemples :

1) $f(x) = -2x^2 - 3x + 5$ $\Delta = 49$ $x_1 = \frac{3 - 7}{-4} = 1$ $x_2 = \frac{3 + 7}{-4} = - \frac{5}{2}$

Donc $f(x) = -2\,(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

2) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ $\Delta = 0$ une racine double $x_0 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ Donc $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Remarque : si b = 0 ou si c = 0, calculer Δ est une perte de temps !!

Exemples : $p(x) = 2x^2 - 3$ racines : $2x^2 = 3$ $x^2 = \frac{3}{2}$ $x = \sqrt{3/2}$ ou $- \sqrt{3/2}$

$q(x) = x^2 - 4x = x(x - 4)$ racines : 0 et 4

1.4 Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré

_ si $\Delta > 0$ et x_1 x_2 sont les deux racines de f (avec $x_1 < x_2$),

x	$-\infty$ $\qquad x_1 \qquad\qquad x_2 \qquad +\infty$
f(x)	signe de a 0 – signe de a 0 signe de a

_ si $\Delta = 0$ et si x_0 est la racine de f

x	$-\infty \qquad x_0 \qquad +\infty$
f(x)	signe de a 0 signe de a

_ si $\Delta < 0$

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
f(x)	signe de a

Démonstration

Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (avec $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$ $\qquad x_1 \qquad\qquad x_2 \qquad +\infty$
$x - x_1$	– 0 + +
$x - x_2$	– – 0 +
$(x - x_1)(x - x_2)$	+ 0 – 0 +
f(x)	signe de a 0 – signe de a 0 signe de a

Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$,

x	$-\infty \qquad x_0 \qquad +\infty$
$(x - x_0)^2$	+ 0 +
f(x)	signe de a 0 signe de a

si $\Delta < 0$: on a vu que $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Exemple : $P(x) = -x^2 + 2x + 3$ $\qquad \Delta = 16 \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = 3$

x	$-\infty \qquad -1 \qquad 3 \qquad +\infty$
P(x)	– 0 + 0 +

2 Polynômes de degré quelconque

2.1 Définition et degré

Définition : On appelle monôme une fonction numérique de la forme : $f(x) = a_k x^k$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{R}$. k est appelé le degré du monôme, a_k est le coefficient du monôme.

Exemples : $p(x) = 5x^3$ est un monôme de degré 3, $p(x) = -4x$ est un monôme de degré 1, $p(x) = 17$ est un monôme de degré 0.

Définition : On appelle polynôme une somme finie de monômes : Autrement dit, un polynome P s'écrit sous la forme : $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$.
$a_0, a_1, ..., a_n$ s'appellent les coefficients de P.
L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[x]$. ("$\mathbb{R}$ crochet x")

Remarque : $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ se note aussi $P = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$

Propriété ("Identification des coefficients ") :
Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Exemple : Soit $P(x) = 2x^2 + 5x – 3$
Déterminer trois réels a, b, c tels que $P(x) = a(x – 1)^2 + b(x – 1) + c$
$a(x – 1)^2 + b(x – 1) + c = a(x^2 – 2x + 1) + b(x – 1) + c = ax^2 + (-2a + b)x + (a – b + c)$
Par identification des coefficients : $\begin{cases} a = 2 \\ -2a + b = 5 \\ a – b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \\ c = 4 \end{cases}$
Donc $P(x) = 2(x – 1)^2 + 9(x – 1) + 4$

Attention, ce sont les coefficients qu'on identifie, pas les monômes !

Définition : Degré d'un polynome :
Le degré d'un polynome est le maximum des degrés de ses monômes. Le polynome nul n'a pas de degré.

Propriété : Soient P et Q deux polynômes. Alors : $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(P))$
$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

2.2 Racine d'un polynôme

Définition : Soit P un polynome et α un nombre réel. Si $P(\alpha) = 0$, on dit que α est une racine de P.

On dit qu'un polynome a une racine évidente si 0, 1, -1, 2 ou -2 est racine de P.

Propriété (admise) : Soit P un polynome. Si α est une racine de P, alors on peut factoriser P par $(x - \alpha)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynome Q tel que, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : Si P est de degré n, alors Q est de degré n – 1.

Exemple (Méthode à retenir) :
$P(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 6$. $\quad$ $P(2) = 0$ (2 est une racine de P).
Donc P est factorisable par $(x - 2)$.
Il existe un polynome Q de degré 2 tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
On cherche donc les réels a, b et c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

Méthode par identification des coefficients :
$(x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$ (on développe le produit)
$= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$ (on regroupe selon les puissances de x)

Par identification des coefficients : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -5 \\ c - 2b = 9 \\ -2c = -6 \end{cases}$ On obtient donc : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ 9 = 9 \\ c = 3 \end{cases}$

Conclusion : $P(x) = (x - 2)(x^2 - 3x + 3)$

Méthode par division euclidienne :

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 5x^2 + 9x - 6 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 - 3x + 3 \\ \quad -3x^2 + 9x - 6 & \\ \quad -3x^2 + 6x & \\ \qquad\quad 3x - 6 & \\ \qquad\quad 3x - 6 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Remarque : Pour un polynôme du second degré, si on trouve une racine évidente, on peut le factoriser sans discriminant et en identifiant "à vue"
Ex : $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ Racine évidente 1 Donc $P(x) = (x - 1)(2x - 1)$