1. Convergence d'une série numérique

1.1 Définition d'une série numérique

Définition :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. une suite de nombres réels.
On appelle série de terme général u_n le symbole $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} u_n$

On appelle somme partielle d'ordre N de la série $\sum u_n$ la suite (S_N) définie par :

$\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$. $(= u_0 + \dots + u_N)$

Remarque :

La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est la série dont la somme partielle est définie par : $\forall N \geq n_0$, $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$.

Exemples :

1) $\sum \frac{3}{2^n}$: $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\left(1 - \frac{1}{2^{N+1}}\right)$

2) $\sum_{n \geq 1} (2n - 1)$ $\quad S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} (2n - 1) = 2 \sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N} 1 = 2\frac{N(N+1)}{2} - N = N^2$

Propriété fondamentale : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_{N+1} = S_N + u_{N+1}$

Démonstration : $S_{N+1} = u_0 + \dots + u_N + u_{N+1} = S_N + u_{n+1}$

Propriété : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ alors $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ est croissante.

Démonstration : $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$ donc (S_N) est croissante.

1.2 Séries convergentes

Définition :

Soit (u_n) une suite et $\sum u_n$ la série de terme général u_n. Soit S_N la somme partielle de la série.

Si la somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ converge, on dit que la série $\sum u_n$ converge, sinon on dit qu'elle diverge.

Si la série converge, on peut définir la somme de la série, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, définie par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} u_n \right)$$

Remarque :

Attention, les symboles $\sum u_n$, $\sum_{n \geq n0} u_n$, $\sum_{n=0}^{N} u_n$ peuvent être utilisés pour n'importe quelle série.

Le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne peut être utilisé que si on a montré avant que la série $\sum u_n$ est convergente (c'est-à-dire si la suite $\sum_{n=0}^{N} u_n$ admet une limite réelle).

Exemple :

Les séries $\sum \frac{3}{2^n}$ et $\sum_{n \geq 1} (2n - 1)$ sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur somme.

$\sum \frac{3}{2^n}$: $S_N = 6\left(1 - \frac{1}{2^{N+1}}\right)$ $\lim_{N \to +\infty} S_N = 6$ donc la série $\sum \frac{3}{2^n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2^n} = 6$

$\sum_{n \geq 1} (2n - 1)$: $S_N = N^2$ $\lim_{N \to +\infty} S_N = +\infty$ donc la série ne converge pas.

Propriété : Si Σu_n converge, alors u_n tend vers 0.

Démonstration : On a vu que $u_n = S_n - S_{n-1}$
Si (S_n) converge vers L, alors u_n converge vers L – L = 0.

Conséquence : Si (u_n) ne tend pas vers 0, on est sur que la série $\sum u_n$ ne converge pas.
On dit que la série diverge grossièrement.

Ex : $\sum \frac{n}{n+1}$: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, donc la série diverge grossièrement.

Attention, la réciproque n'est pas vraie. Il se peut que u_n tende vers 0, mais que la série $\sum u_n$ ne converge pas. Exemple : on verra que $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.3 Propriétés des séries convergentes

Propriété :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$.
_ Si Σu_n converge et si Σv_n converge, alors $\Sigma(u_n + v_n)$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
_ Si Σu_n converge, alors $\Sigma(\lambda u_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)$.

2. Séries de référence

2.1 Série géométrique et séries associées

Propriété : Soit $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$.

Alors les séries $\sum q^n$, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $-1 < q < 1$

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ $\quad \sum_{n=1 \text{ (ou } 0)}^{+\infty} nq^{n-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$ et $\quad \sum_{n=2 \text{ (ou } 0 \text{ ou } 1)}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}$

Démonstration :
_ si $q \geq 1$ ou $q \leq -1$ les suites (q^n), (nq^{n-1}) et $n(n-1)q^{n-2}$ ne tendent pas vers 0. Les séries divergent grossièrement.
_ Si $-1 < q < 1$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$

$-1 < q < 1$ donc $\lim_{N \to +\infty} q^{N+1} = 0$ donc $\lim_{N \to +\infty} S_N = \dfrac{1}{1-q}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction S_N définie sur $]-1;1[$ par : $S_N(q) = \sum_{n=0}^{N} q^n$

Alors sur $]-1;1[$ $S_N'(q) = \sum_{n=1}^{N} nq^{n-1}$

Or $S_N(q) = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$ donc $S_N'(x) = \dfrac{-(N+1)q^N(1-q) - (-1)(1-q^{N+1})}{(1-q)^2} = \dfrac{1-(N+1)q^N + Nq^{N+1}}{(1-q)^2}$

$\lim_{N \to +\infty} (N+1)q^N = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} Nq^{N+1} = 0$ (croissances comparées) donc $\lim_{N \to +\infty} S_N'(q) = \dfrac{1}{(1-q)^2}$

Donc $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.
On procède de même avec S_N'' pour montrer la troisième inégalité.

Remarque : moyen mnémotechnique : si $f(q) = q^n$ et $g(q) = \frac{1}{1-q}$

alors $f'(q) = nq^{n-1}$ $g'(q) = -\frac{-1}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}$

$f''(q) = n(n-1)q^{n-2}$ $g''(q) = -\frac{-2(1-q)}{(1-q)^4} = \frac{2}{(1-q)^3}$

_ astuce à retenir pour certains calculs : $n^2 = n(n-1) + n$

_ Pensez à changer d'indice, surtout dans le cas $\sum_{n \geq 1} q^{n-1}$ ($n' = n - 1$)

Exemples : 1) Convergence et calcul de $\Sigma \frac{2}{3^{n+2}} = \frac{2}{9} \Sigma \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$-1 < \frac{1}{3} < 1$ Donc $\Sigma \frac{2}{3^{n+2}}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+2}} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$

2) Convergence et calcul de $\Sigma \frac{n^2}{2^n}$ $n^2 = n(n-1) + n$

Donc $\frac{n^2}{2^n} = n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\sum n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ convergent donc $\sum \frac{n^2}{2^n}$ converge

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2 \times 8}{4} + \frac{4}{2} = 6$

2.2 Série exponentielle

Propriété (admise) $\forall x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exemples : $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

3. Séries absolument convergentes

Définition :

Soit (u_n) une suite. On dit que la série Σu_n est absolument convergente si $\Sigma |u_n|$ est convergente.

Propriété (admise) :
Toute série absolument convergente est convergente.

Exemple : $\sum \frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$

$|u_n| = \frac{1}{2^n}$. $\sum \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique) donc $\sum \frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$ est absolument convergente, donc est convergente.

Remarques :
_ Attention, la réciproque n'est pas vraie.
Exemple : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente

Démonstration : $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et on a vu en exercice que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Mais, en posant $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$, on a vu (chapitre 5) que (S_N) converge (car S_{2N} et S_{2N+1} sont adjacentes). Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

_ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, alors $|u_n| = u_n$, donc pour une série à termes positifs, la convergence et la convergence absolue sont équivalentes.