Chapitre 19 : Séries – Feuille d'exercices n°1

Exercice 1

On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$. Soit $(S_N)_{N\geq 1}$ la somme partielle de la série.

1) Montrer que $\forall$ n≥ 1, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et en déduire l'expression de S_N en fonction de N.

2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 2

On considère la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$. On note T_N la $N^{\text{ème}}$ somme partielle de la série.

1) Vérifier que $\forall$ n ≥ 2, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. En déduire que $\forall$ N ≥ 2, $T_N \leq 1 - \frac{1}{N}$

2) Etudier la monotonie de $(T_N)_{N\geq 2}$.

3) En déduire que la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ converge. *(remarque : on peut montrer que $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$)*

Exercice 3

On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ (appelée série harmonique).

On note U_N la $N^{\text{ème}}$ somme partielle de cette série.

1) Montrer que $\forall$ x $\in$]0; + ∞[, $\ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

2) En déduire que $\forall$ N ≥ 1, $\ln(N+1) \leq U_N$

3) La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est-elle convergente ?

(De manière générale, une série du type $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est appelée série de Riemann.

Vous montrerez en $2^{\text{ème}}$ année que cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$).

Exercice 4

Justifier l'existence et calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}$ b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{4^n}$ c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{4^n}$ d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}$ f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3^{n-1}}$ g) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n+3}{5^n}$.