Chapitre 18 : Espaces vectoriels

1. Notion d'espace vectoriel

On sait additionner deux réels, deux éléments de $\mathbb{R}^n$ deux matrices, deux polynômes, deux fonctions, deux suites, ...
De la même manière, on sait multiplier un réel par un réel, un élément de $\mathbb{R}^n$ une matrice par un réel, un polynôme par un réel, une fonction par un réel, ...
On va donner un cadre théorique général à ces cas particuliers.

Définition (intuitive) :
Soit E un ensemble.
Si on a défini dans E une addition et la multiplication par un nombre réel, on dit que E est un espace vectoriel.

Dans ce cas, les éléments de E sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{R}$ des scalaires.

Exemples :
_ $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel :
si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a défini $X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ et $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ ... \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

On peut identifier $\mathbb{R}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On utilisera donc les notations $(x_1, ..., x_n)$ ou $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

_ $M_{n,p}(\mathbb{R})$: si $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a défini $A + B$ et λA.
_ $\mathbb{R}[X]$ (ensemble des polynômes) et $\mathbb{R}_n[X]$ (ensemble des polynômes de degré $\leq n$) sont des espaces vectoriels :
si $P = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$, $Q = b_nX^n + ... + b_1X + b_0$ sont des polynômes, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a défini $P + Q = (a_n + b_n)X^n + ... + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)$
et $\lambda P = (\lambda a_n)X^n + ... + (\lambda a_1)X + \lambda a_0$. $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel.
_ l'ensemble des suites, l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des variables aléatoires sur un univers Ω etc… sont des espaces vectoriels

2. Les sous-espaces vectoriels

2.1 Définition d'un sous-espace vectoriel

Définition :
Soit E un espace vectoriel et F une partie de E.
Alors F est un sous-espace vectoriel de E si :
(SE1) : $0 \in F$ (ou $F \neq \emptyset$)
(SE2) : $\forall X \in F, \forall X' \in F, X + X' \in F$ (F est stable par addition)
(SE3) : $\forall X \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X \in F$ (F est stable par multiplication par un scalaire)

Remarques : _ (SE2) et (SE3) sont équivalentes à : $\forall X \in F, \forall X' \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X + X' \in F$
_ Un sous-ensemble est en général défini comme l'ensemble des éléments qui vérifient une certaine propriété. Il faut donc vérifier que si deux éléments vérifient la propriété, leur somme aussi, et le produit par un réel aussi.

Exemples :

1) 1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$. $F \subset \mathbb{R}^3$

_ $0 + 2\times 0 - 3 \times 0 = 0$ donc $(0,0,0) \in F$.

_ si $X = (x, y,z) \in F$ et si $X' = (x', y',z') \in F$, $x + 2y – 3z = 0$ et $x' + 2y' – 3z = 0$

Alors $X + Y = (x + x', y + y', z + z')$

et $x + x' + 2(y + y') - 3(z + z'') = x + 2y + x' + 2y' = 0 + 0 = 0$.

Donc $X + X' \in F$.

_ Si $X = (x, y) \in F$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$(\lambda x) + 2(\lambda y) – 3(\lambda z) = \lambda(x + 2y – 3z) = \lambda\times 0 = 0$ donc $\lambda X \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $F = \{(x, y) \mathbb{R}^2 , 2x – y + 3 = 0\}$ $F \subset \mathbb{R}^2$.

mais $2\times 0 – 0 + 3 \neq 0$ donc $0 \notin F$. F n’est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{F} = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. $\mathcal{F}$ sev de $M_2(\mathbb{R})$?

_ $A\times O = O$ $O\times A = O$ donc $A\times O = O\times A$ donc $O \in \mathcal{F}$

_ soient $M \in \mathcal{F}$ et $M' \in \mathcal{F}$: donc $AM = MA$ et $AM' = M'A$

$M + M' \in \mathcal{F}$? $A(M + M') = AM + AM' = MA + M'A = (M + M')A$ donc $M + M' \in \mathcal{F}$.

_ soit $M \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $AM = MA$ $\lambda M \in \mathcal{F}$?

$A(\lambda M) = \lambda(AM) = \lambda(MA) = (\lambda M)A$ donc $\lambda M \in \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

Remarque (Oral) : L'ensemble des fonctions continues, l'ensemble des fonctions dérivables, etc… sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions.

Propriété : Soit (S) un système linéaire homogène : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$

Alors l'ensemble des solutions du système forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Remarque : Ex 1 :$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.

F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, donc c'est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré

Définition :
Soit E un espace vectoriel et $X_1, X_2, ..., X_p$ une famille de vecteurs de E.
Soit $Y \in E$. On dit que Y est combinaison linéaire de $X_1, ..., X_p$ s'il existe des nombres réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que $Y = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + ...+ \lambda_pX_p$.

Exemple : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$

La matrice Y est-elle combinaison linéaire de X_1 et X_2 ?

$$Y = aX_1 + bX_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = -1 \\ -2a + 3b = -12 \\ 4a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ b = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Donc $Y = 3X_1 - 2X_2$

Définition - Propriété
Soit $(X_1, ..., X_p)$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $(X_1, ..., X_p)$ est noté $\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_p)$. (ou $< X_1, ... , X_p >$)
C'est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace vectoriel engendré par la famille $(X_i)_{i \in \{1,..,p\}}$.

$\{\lambda_1X_1 + \ldots + \lambda_pX^p \text{ avec } \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_p)$

Si $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(V_1, \ldots, V_p)$, on dit que $V_1, \ldots, V_p$ est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.

Exemples :
_ Soit $\mathcal{F} = \{(2z,-3z,z), z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Trouver une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
$= \{z(2 ;-3 ;1), z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2,-3,1))$.
_ Soit $\mathcal{G} = \{\begin{pmatrix} 3a + 2b & a - b \\ 2a & -3b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{R})$.
Trouver une famille génératrice de $\mathcal{G}$.

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & a \\ 2a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & -b \\ 0 & -3b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

Remarques :
_ Dans une famille génératrice, on peut remplacer un vecteur par un de ses multiples (non nul)

Exemple : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

_ Si $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(V_1, \ldots, V_p)$ et si V_p est combinaison linéaire de $V_1, \ldots, V_{p-1}$, alors $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(V_1,\ldots,V_{p-1})$.

Exemple : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

3. Base d'un espace vectoriel

3.1 Famille libre

Définition :
_ On dit que (X_i) est une famille libre si
$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_p X_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$.
(si une combinaison linéaire est nulle, tous les coefficients sont nuls)

Remarques :
_ Attention au sens de la définition : l'autre sens est évident ! (si $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ alors $\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_p X_p = 0$
_ Une famille est libre s'il n'existe aucune relation (sauf 0 = 0) entre les vecteurs.
_ Si une famille est libre, on dit que les vecteurs sont indépendants, sinon, on dit qu'ils sont liés.

Exemple : dans $\mathbb{R}^2$
_ $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Si $\lambda U + \mu V = 0 : \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda - 3\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ -7\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$
U et V forment une famille libre.
_ $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -15/2 \end{pmatrix}$
Si $\lambda W + \mu X = 0 \quad \begin{cases} -2\lambda + 5\mu = 0 \\ 3\lambda - \dfrac{15}{2}\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda + 5\mu = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\lambda + 5\mu = 0$
Il y a une infinité de solutions. La famille n'est pas libre.

Propriété :
_ Une famille composée d'un seul vecteur forme une famille libre si et seulement si le vecteur est non nul.
_ Une famille composée de deux vecteurs est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (SEULEMENT AVEC 2 !!)

Ex : Pour les exemples précédents : U et V ne sont pas colinéaires, donc (U, V) est une famille libre.
W et X sont colinéaires ($X = -\dfrac{5}{2}W$) : ils ne forment pas une famille libre.

3.2 Base d'un espace vectoriel

Définition
Soit $(X_1, \ldots, X_p)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E.
On dit que $(X_1, \ldots, X_p)$ est une base de E si $(X_1, \ldots, X_p)$ est une famille libre et génératrice.

La définition est identique pour la base d'un sous-espace vectoriel.

Exemple

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} 3a + 2b \\ a - b \\ 2a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$ Base de F ?

On a $F = \left\{ a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de F.

Comme ils ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de F, donc une base de F.

Propriété - Définition :

Soit $(X_1, \dots, X_p)$ une base de E.

Alors tout élément $Y \in E$ s'écrit de façon unique $Y = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_p X_p$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$.

$(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ sont appelées les coordonnées de Y dans la base $(X_1, ..., X_n)$.

Exemple : Admettons que $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Coordonnées de X dans la base (V, W) ?

$X = aV + bW \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ 2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

Donc X a pour coordonnées (2;1) dans la base (V, W).

3.3 Bases canoniques

Définition – Propriété (Base canonique de $\mathbb{R}^n$) :

Dans $\mathbb{R}^n$: pour $i \in \{1,..., n\}$, on note $E_i = (0,..,0,1,0..,0)$ (1 à la i-ème place).

Alors la famille $(E_1, ..., E_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique.

Si $X = (x_1, \dots, x_n)$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de X dans la base canonique.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Si $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, X a pour coordonnées (4,-1,2) dans la base (E_1, E_2, E_3).

Définition – Propriété

Dans $\mathbb{R}_n[X]$ $e_0 = 1, e_1 = X, ..., e_n = X^n$ forment une base, appelée base canonique.

Si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX_n$, P a pour coordonnées $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dans la base canonique.

Ex : $(1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

Si $P = 3X^2 - 2X + 1$ les coordonnées de P dans la base canonique sont : (1;-2;3).

Définition - Propriété

Dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$ si on note $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & 1 & ... \\ 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$ pour $i \in \{1,..,n\}$, $j \in \{1,..,p\}$.

La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p}$ est une base de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée base canonique.

Ex : Base canonique de $M_2(\mathbb{R})$

$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.4 Notion de dimension

Propriété – Définition Dans un espace vectoriel E, toutes les bases de E ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé dimension de l'espace vectoriel.

Propriété :

D'après les bases canoniques vues dans le paragraphe précédent :

$\mathbb{R}^n$ est de dimension n. $M_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi, $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension $n \times p$.

$\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension n + 1.

Attention au vocabulaire : cardinal de la base = dimension de l'E.V.

Propriété : Soit E un espace vectoriel de dimension n.

Alors toute famille libre de n vecteurs est une base de E.

Ex :

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. (U, V, W) base de $\mathbb{R}^3$?

$\dim(R^3) = 3$. Donc il suffit de montrer que (U, V, W) forment une famille libre.

$aU + bV + cW = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 0 \\ 3a + b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ Donc (U, V, W) forment une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Applications linéaires

4.1 Définition

Définition :
Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application de E vers F.
On dit que f est une application linéaire si :
(LIN1) $\forall$ X,X' $\in$ E^2, f(X + X') = f(X) + f(X')
(LIN2) $\forall$ X $\in$ E, $\forall$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X) = \lambda f(X)$.

Remarque :
(LIN1) et (LIN2) peuvent être remplacés par :
$\forall X \in E, \forall X' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$

Définition : Soit E un espace vectoriel.
Une application linéaire de E dans lui-même est appelée un endomorphisme.

Exemples : 1) Soit f $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - 2z \end{pmatrix} \end{array}\right.$

(LIN1) Si X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ X' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ X + X' = $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$

$$f(X + X') = \begin{pmatrix} 2(x + x') - (y + y') + (z + z') \\ x + x' - 2(z + z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z + 2x' - y' + z' \\ x - 2z + x' - 2z' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x' - y' + z' \\ x' - 2z' \end{pmatrix} = f(X) + f(X').$$

(LIN2) si X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

$$f(\lambda X) = \begin{pmatrix} 2(\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z) \\ (\lambda x) - 2(\lambda z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(2x - y + z) \\ \lambda(x - 2z) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - 2z \end{pmatrix} = \lambda f(X).$$

Donc f est une application linéaire.

2) Soit f : $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto P' - P \end{array}\right.$

$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X], f(P + Q) = (P + Q)' - (P + Q) = P' + Q' - P - Q = P' - P + Q' - Q$
$= f(P) + f(Q)$.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda P) = (\lambda P)' - \lambda P = \lambda P' - \lambda P = \lambda(P' - P) = \lambda f(P)$.
Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Propriété :
Soit E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E vers F. Alors :
_ f(0) = 0
_ l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images :
si $X = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_p X_p$, alors $f(X) = \lambda_1 f(X_1) + ... + \lambda_p f(X_p)$.

Démonstration : _ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in E, f(\lambda X) = \lambda f(X)$ avec $\lambda = 0$: $f(0X) = 0f(X)$ $f(0) = 0$
_ par récurrence

4.2 Représentation matricielle des applications linéaires

Propriété :

_ Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors l'application $f : \begin{cases} M_{p,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto MX \end{cases}$ est une application linéaire.

_ Inversement, si f une application linéaire de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
Alors il existe une matrice $M_f \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $f(X) = M_f X$.
M_f est appelée matrice de l'endomorphisme f dans les bases canoniques.

Exemples :

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 3y \end{pmatrix}$

Alors $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Donc f est une application linéaire de matrice $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Alors si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $f(X) = MX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -y + 4z \\ -x + 4y + 3z \end{pmatrix}$

Remarque : Les colonnes de M_f sont les images de la base canonique

Base canonique de $\mathbb{R}^2$: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(E_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $f(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

donc M_f contient les vecteurs colonnes $f(E_1)$, $f(E_2)$.

4.3 Noyau et image d'une application linéaire

Définition :

Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle noyau de f, noté Ker f, l'ensemble des antécédents de 0.

$$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

On appelle image de f, noté Im f, l'ensemble des images par f des éléments de E.

$$\text{Im } f = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F \mid \exists\, x \in E, y = f(x)\}.$$

Attention : Ker f $\subset$ E, Im f $\subset$ F.

Remarques :

_ $X \in$ Ker f si et seulement si $f(X) = 0$

_ $Y \in$ Im(f) si et seulement si l'équation $f(X) = Y$ admet au moins une solution.

$\Leftrightarrow$ Y admet au moins un antécédent par f.

Propriété : Soit f une application linéaire de E dans F.
Alors Ker f est un sous-espace vectoriel de E, et Im f est un sous-espace vectoriel de F.

Exemple :

Soit f $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ - x/2 + y \end{pmatrix}$.

Déterminer Ker f et Im f.

_ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ Ker f $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x/2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \; L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \end{cases}$

On prend y comme inconnue secondaire : x = 2y

Ker f = $\{\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\} = \{y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

_ Soit Y = (a,b) $\in \mathbb{R}^2$. On cherche à quelle(s) condition(s) le système $\begin{cases} x - 2y = a \\ -x/2 + y = b \end{cases}$ admet une ou des solutions.

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = a \\ 0 = a + 2b \end{cases}$ admet des solutions si et seulement si 0 = a + 2b $\Leftrightarrow$ a = -2b

Im f = $\{\begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Propriété : Si f est une application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ vers $M_{p,1}(\mathbb{R})$ et si $e_1, ..., e_n$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ alors Im f = Vect($f(E_1), ..., f(E_n)$)

Exemple précédent :

Base canonique de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 - 2\times 0 \\ -1/2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ $\quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc Im(f) = Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc Im(f) = Vect($\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$)

Propriété :
Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :
_ f est injective si et seulement si Ker f = $\{0_E\}$
_ f est surjective si et seulement si Im f = F.

Démonstration :
_ si f est injective : soit x $\in$ Ker f : alors f(x) = 0 donc f(x) = f(0) comme f est injective x = 0.
Donc Ker f = {0}.
_ si Ker f = {0} : si f(x) = f(x') f(x) – f(x') = 0 f(x – x') = 0 (f linéaire)
Donc x – x' $\in$ Ker f, donc x – x' = 0 x = x'.
_ surjectivité : immédiat d'après définition.

Exemple précédent : ker f = $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

Im f = $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc de dimension 1 donc Im f $\neq \mathbb{R}^2$ donc f n'est pas surjective.

(ou : Im f = $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / a + 2b = 0\right\} \neq \mathbb{R}^2$)

Définition :
Soit f une application linéaire de E vers F. Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.
Soit f un endomorphisme E $\longrightarrow$ E. Si f est bijective, on dit que f est un automorphisme.

4.4 Applications linéaires, matrices et système linéaire :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Soit f l'application linéaire $\begin{cases} M_{p,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto AX \end{cases}$.

Alors les solutions du système homogène AX = 0 sont les éléments de Ker(f). (Ils forment donc un sous-espace vectoriel)

Le système AX = B (où $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ a des solutions si et seulement s'il existe X tel que f(X) = B, donc si et seulement si $B \in \operatorname{Im} f$.

Système de Cramer :

Propriété :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(i) A est inversible
(ii) le système (S) : AX = 0 est un système de Cramer
(ii) l'endomorphisme f : $\begin{cases} M_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$ est bijectif.
Dans ce cas, l'application réciproque f^{-1} est un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A^{-1}.

Ex :

Soit f : $\begin{cases} M_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 3y \end{pmatrix} \end{cases}$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

On peut montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc f est un automorphisme de $M_{2,1}(\mathbb{R})$.

Son application réciproque est : $f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$