**Chapitre 18 : Espaces vectoriels  Feuille d'exercices n°3**

**Exercice 1**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2x - 4z \\ y - 3z \end{pmatrix}$.

Sans utiliser la définition, montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 2**

Soit f l'application $M_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{3,1}(\mathbb{R}) ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Déterminer ker f. f est-elle injective ?
3) Déterminer une base de Im f. f est-elle surjective ?

**Exercice 3**

Dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère l'endomorphisme f de matrice dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une base de Ker(f). f est-elle injective ?
2) Déterminer une équation (ou un système d'équations) définissant Im f. f est-elle surjective ?

**Exercice 4**

Soit f l'application $\begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto P - (X + 1)P' \end{cases}$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Montrer que X + 1 appartient à Ker(f).
3) a) Si $P = aX^2 + bX + c$, exprimer f(P) en fonction de a, b, c.
b) En déduire Ker(f).

**Exercice 5**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est inversible et déterminer $A^{-1}$.
2) On considère l'endomorphisme f : $\begin{cases} M_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto AX \end{cases}$
a) Préciser Ker(f) et Im(f).
b) Montrer que f admet une application réciproque et donner l'expression de $f^{-1}$.