Chapitre 18 : Espaces vectoriels : Feuille n°2

Exercice 1

On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme : $\begin{pmatrix} a+b-3c & a-2b \\ 2a-c & 3c \end{pmatrix}$, où a, b et c sont des réels quelconques. Déterminer une base de $\mathcal{F}$.

Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 18 & -5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que P est inversible, que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et que $A = PTP^{-1}$.

Soit $\mathcal{E} = \{M \in M_2(\mathbb{R}), \text{ telle que } AM = MA\}$

1) Déterminer les matrices $N \in M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec T.

2) Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$.

Montrer que M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec T.

3) En déduire l'expression des matrices M qui commutent avec A, puis une base de $\mathcal{E}$.

Exercice 3

Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$ dans l'exercice 1, et de $\mathcal{E}$ dans l'exercice 2.

Exercice 4

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (2,0,-1)$, $e_3 = (2,1,1)$.

1°) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2°) Soit $u = (4,-1,1)$. Quelles sont les coordonnées de u dans la base e_1, e_2, e_3 ?

Exercice 5

Soient $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y \end{pmatrix} \end{array} \right.$ et $g \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x+2y+1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

f et g sont-elles des applications linéaires ?

Exercice 6 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$.

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{l} M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM - MA \end{array} \right.$

Montrer que f est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.

Exercice 7

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} f(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} \\ f(\overrightarrow{e_3}) = 4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} \end{array} \right.$

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

1) Rappeler l'expression de $\overrightarrow{u}$ en fonction de $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

2) Exprimer $f(\overrightarrow{u})$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ (en fonction de x, y, z).