

1. Définitions

1.1 Définition d'une matrice

Définition :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle matrice réelle à n lignes et p colonnes un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

Notation :

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes.

Si on note $a_{i,j}$ le nombre situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne, alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note aussi $A = (a_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,p\}}$.

L'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes est noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Cas particuliers :

- _ si $n = 1$: la matrice est appelée matrice ligne
- _ si $p = 1$: la matrice est appelée matrice colonne.

_ un élément $(x_1; \dots; x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ peut être représenté par la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

_ On appelle matrice nulle (notée $O_{n,p}$) la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{2} & 5/2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : \text{c'est une matrice colonne.}$$

$$C = (1 \ 0 \ 1) \in M_{1,3}(\mathbb{R}) : \text{c'est une matrice ligne.}$$

1.2 Vocabulaire des matrices

Définitions :

_ Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.

_ Une matrice carrée est dite diagonale si tous les termes qui ne sont pas sur la diagonale sont

$$\text{nuls : } \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0. \quad D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

_ La matrice identité (ou unité) est la matrice diagonale qui ne contient que des 1 sur la

diagonale. On la note I_n .
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

_ Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée dont tous les termes sous la diagonale sont nuls : $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

_ Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée dont tous les termes au-dessus de la diagonale sont nuls : $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

_ Une matrice carrée est symétrique si les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont égaux. $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \quad a_{j,i} = a_{i,j}$.

Ces matrices étant d'une étude plus simple, on se ramène souvent à des matrices de ce type.

Exemples :

$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonale $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure

$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure. $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique

2. Opérations sur les matrices

2.1 Addition de deux matrices

Définition :

Soient A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

La matrice $A + B$ est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,p\}}$$

Remarque :

Pour additionner deux matrices, il faut qu'elles aient le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors } A + B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Propriété :

Pour toutes matrices A, B, C de $M_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre

Définition :

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel.

Alors la matrice λA est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, p\}}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors } 3A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 0 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Propriété :

Pour toutes matrices A et B de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, pour tous réels λ et μ ,

$$1A = A$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

Remarque : Soit λ est un réel et A une matrice. Si $\lambda A = 0$ alors $\lambda = 0$ ou $A = 0$.

2.3 Multiplication de deux matrices

Définition :

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in M_{n,q}(\mathbb{R})$.

On appelle produit des matrices A et B la matrice AB appartenant à $M_{p,q}(\mathbb{R})$ définie par :

si $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$,

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} (= a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots + a_{i,n} b_{n,j}) \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -11 & 9 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -11 & 9 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \quad B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 10 & 2 \\ 6 & 17 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarques : _ pour que le produit $A \times B$ ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

_ de manière générale $A \times B \neq B \times A$ (ces matrices n'ont même pas forcément le même nombre de lignes et de colonnes).

_ attention, il se peut que $A \times B = 0$ sans que $A = 0$ ou $B = 0$

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}. \text{ Alors } A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

Propriétés de la multiplication de matrices :

$\forall A, A' \in M_{p,n}(\mathbb{R}), \forall B, B' \in M_{n,q}(\mathbb{R}), \forall C \in M_{q,r}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$

$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (associativité)

$A.(B + B') = A.B + A.B'$

$(A + A').B = A.B + A'.B$

$(\lambda A).B = A.(\lambda B) = \lambda(A.B)$

$I_p \times A = A \quad A \times I_n = A$

Exemples : _ Si $A \in M_n(\mathbb{R})$. Factoriser $A^2 + 3A$?

$A^2 + 3A = A \times A + A \times 3I = A(A + 3I)$ et non pas $A(A + 1)$ qui n'a aucun sens !

Remarque : si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$ alors AB existe et $AB \in M_n(\mathbb{R})$ (on dit que $M_n(\mathbb{R})$ est stable par produit).

Définition : Soit A et $B \in M_n(\mathbb{R})$. Si $A \times B = B \times A$, on dit que les matrices A et B commutent.

Exemples :

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices qui commutent avec A .

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } AM = MA \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = a \\ b+2d = b+2a \\ c = c \\ 2c+d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a \end{cases}$$

Donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

2) Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B$, est-ce que A et B commutent ?

$A \times B = A \times A^2 = A^3 \quad B \times A = A^2 \times A = A^3$ donc A et B commutent.

2.4 Transposée d'une matrice

Définition :

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle transposée de A , notée tA , la matrice appartenant à $M_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par : ${}^tA = (a_{j,i})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété : $\forall A, A' \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$${}^t({}^tA) = A \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

$${}^t(\lambda A) = \lambda ({}^tA) \quad {}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$$

Remarque : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$

Exemple : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^tAA$.

Alors ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA({}^tA) = {}^tAA = B$ donc B est symétrique.

2.5 Ecriture matricielle d'un système

Soit (S) le système d'équation :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

(S) s'écrit également :
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Notons $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Alors le système (S) s'écrit matriciellement : $AX = B$.

A est appelée matrice du système.

Exemple : Le système $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ s'écrit aussi : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Matrices inversibles

3.1 Définition

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = I_n$ ou $B \times A = I_n$, alors on dit que A est inversible et B est appelée matrice inverse de A , notée A^{-1} .

A retenir : Si A est inversible, $A^{-1}A = I_n$, $AA^{-1} = I_n$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

3.2 Propriétés

Propriété : I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$

_ si A est inversible, alors A^{-1} est inversible, et $(A^{-1})^{-1} = A$.

_ si A est inversible, alors tA est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

_ si A est inversible et $\lambda \neq 0$, alors λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

_ si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

_ il n'y a pas de propriété entre addition et inverse !!

Propriété :

_ Soit A une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Alors A est inversible si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \neq 0$.

Dans ce cas, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$.

_ Soit A une matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$

Alors A est inversible si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} \neq 0$.

Dans ce cas, A^{-1} est aussi une matrice triangulaire supérieure.

(propriété identique pour les matrices triangulaires inférieures).

Exemples :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible (matrice diagonale) et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (matrice triangulaire avec un zéro sur la diagonale)

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible (matrice triangulaire avec coefficients diagonaux non nuls).

Attention, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible (bien que zéros sur la diagonale)

3.3 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Méthode pour calculer A^{-1} :

Principe : On transforme simultanément A et I_n par les mêmes opérations sur les lignes, jusqu'à avoir transformé A en I_n . L'image de I_n est alors A^{-1} .

Pour cela

1) On transforme A en une matrice triangulaire supérieure (pivot de Gauss)

_ si la diagonale contient au moins un 0, A n'est pas inversible

_ si aucun coefficient diagonal n'est nul, A est inversible.

Dans ce cas :

2) On transforme cette matrice en une matrice diagonale (en éliminant par pivot les termes au-dessus de la diagonale en commençant par la dernière colonne).

3) On transforme cette matrice en I_n .

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 7L_3$$

$$\begin{pmatrix} -28 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & 3/7 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow -L_1/28 \quad L_2 \leftarrow L_2/42 \quad L_3 \leftarrow L_3/2$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & 1/7 & 0 \\ 1/7 & 3/7 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.4 Matrice inversible et système de Cramer

Propriété : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors le système $AX = B$ est un système de Cramer si et seulement si la matrice A est inversible. Dans ce cas la solution unique est $X = A^{-1}B$.

Exemple : (S) : $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 5 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$

Si on pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. (S) $\Leftrightarrow AX = B$. On a vu que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

Alors $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Remarque : Pour calculer A^{-1} , on peut donc résoudre le système $AX = Y$, où Y est une matrice quelconque. Si on trouve une matrice B telle que $X = BY$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors

$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 & L_1 \\ -3x_2 = 2y_2 - y_1 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{2} - \frac{y_1}{6} + \frac{y_2}{3} = \frac{y_1}{3} + \frac{y_2}{3} \\ x_2 = \frac{y_1}{3} - \frac{2y_2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

3.5 Matrices inversibles et égalités

Propriété : Si on multiplie (à gauche ou à droite) les deux membres d'une égalité matricielle par une matrice inversible, on obtient une égalité équivalente.

Propriété (à savoir redémontrer)

Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Soient $X, X' \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$.

Alors $X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X$

$A = PA'P^{-1} \Leftrightarrow A' = P^{-1}AP$

Démonstration :

$X = PX' \Leftrightarrow P^{-1}X = P^{-1}PX' = IX' = X'$

$A = PA'P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = P^{-1}PA'P^{-1}P = I_n A' = A'$

Remarque : Pour résoudre des équations matricielles d'inconnue M , on utilise souvent un changement d'inconnue du type $N = P^{-1}MP$ pour résoudre.

_ On résout l'équation en N à l'aide de coefficients indéterminés

_ On revient à M en utilisant $M = PNP^{-1}$.

(voir exercices).

Ex : Soit $A, D, P \in M_n(\mathbb{R})$ telles que P est inversible et $A = PDP^{-1}$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.

Montrer que $AM = MA \Leftrightarrow DN = ND$.

$N = P^{-1}MP$ donc $PNP^{-1} = PP^{-1}MPP^{-1} = PNP^{-1} = M$.

$AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \quad PDNP^{-1} = PNDP^{-1} \quad DN = ND$.

4. Puissance d'une matrice

4.1 Calcul de A^n

Si $A \in M_p(\mathbb{R})$, on peut définir $A^2, A^3, \dots, A^n$. ($A^{n+1} = A^n \times A = A \times A^n$)

Par convention, $A^0 = I_p, A^1 = A$.

Propriété :

si D est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_p^n \end{pmatrix}$.

Pour démontrer une formule pour A^n (avec ou sans coefficients indéterminés), on peut utiliser la démonstration par récurrence.

Exemple avec des coefficients indéterminés : Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} a_n & 3^n b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de (a_n) et (b_n) .

Par récurrence sur n :

$M^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent.

Supposons que $M^n = \begin{pmatrix} a_n & 3^n b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$

$$\text{alors } M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} a_n & 3^n b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n & 2a_n + 3^{n+1}b_n \\ 0 & 3a_n \end{pmatrix}$$

En posant $a_{n+1} = 3a_n$ et $b_{n+1} = \frac{2a_n}{3^{n+1}} + b_n$, on obtient : $M^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 3^{n+1}b_{n+1} \\ 0 & a_{n+1} \end{pmatrix}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \begin{pmatrix} a_n & 3^n b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$

(a_n) est géométrique de raison 3 donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \times 3^n = 3^n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{2 \times 3^n}{3^{n+1}} + b_n = \frac{2}{3} + b_n$ donc (b_n) est arithmétique de raison $r = \frac{3}{2}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = b_0 + nr = \frac{3n}{2}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Remarque : soit A, B, P des matrices telles que P est inversible et $A = PBP^{-1}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1}) = PBB\dots BP^{-1} = PB^n P^{-1}$.

Définition :

Soit A une matrice de $M_p(\mathbb{R})$. S'il existe un entier n tel que $A^n = 0$, on dit que A est nilpotente.

Propriété : Formule du Binôme de Newton

Soient A et $B \in M_p(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ (A et B commutent).

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A est nilpotente.

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche la formule de M^n . $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3I_2 + A$.

Or, A et $3I_2$ commutent, donc $M^n = (3I_2 + A)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3I_2)^{n-k} A^k$

Or $A^2 = A^3 = \dots = 0$ Donc $M^n = \binom{n}{0} (3I_2)^n A^0 + \binom{n}{1} (3I_2)^{n-1} A^1 = 3^n I_2 + n3^{n-1} A$
 $= \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \times 3^{n-1} \times n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Conclusion : Pour calculer A^n :

_ si A est diagonale, alors $A^n = \begin{pmatrix} a_{1,1}^n & & \\ & \dots & \\ & & a_{p,p}^n \end{pmatrix}$

_ si $A = PBP^{-1}$, alors $A^n = PB^n P^{-1}$

_ si $A = B + C$ avec B et C qui commutent, binôme de Newton

_ si formule donnée (avec ou sans suites indéterminées) récurrence

4.2 Suites récurrentes, marches aléatoires et puissances de matrices

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_{p,1}(\mathbb{R})$, et $M \in M_p(\mathbb{R})$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$ alors on peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N} X_n = M^n X_0$ (par récurrence sur n , à redémontrer à chaque fois) (analogie avec suites géométriques de raison M)

Exemple : Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $u_1 \in \mathbb{R}$, $v_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases}$$

Si on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, alors $MX_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n + 2v_n \\ 3v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

Montrons que $\forall n \geq 1$, $X_n = M^{n-1} X_1$ par récurrence :

_ pour $n = 1$ $M^{1-1} X_1 = IX_1 = X_1$

_ si $X_n = M^{n-1} X_1$ alors $X_{n+1} = MX_n = MM^{n-1} X_1 = M^n X_1$

Donc $\forall n \geq 1$, $X_n = M^{n-1} X_1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0 = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 2(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1}u_1 + 2(n-1)3^{n-2}v_1 \\ 3^{n-1}v_1 \end{pmatrix}$.

Donc $u_n = 3^{n-1}u_1 + 2(n-1)3^{n-2}v_1$ et $v_n = 3^{n-1}v_1$.

Remarque :

Dans le cas de marches aléatoires, l'énoncé se traduit souvent, à l'aide de la formule des probabilités totales, par une formule du type $X_{n+1} = MX_n$. Comme $X_n = M^n X_0$, il faut donc déterminer M^n .

Exemple :

Une puce se déplace entre 2 cases A et B. A l'instant $n=0$, elle est en A.

Si elle est sur A, elle se déplace sur A et B avec la même probabilité. Si elle est en B, elle reste en B avec une probabilité $2/3$.

Soit A_n l'événement "elle est en A à l'instant n " et $B_n =$ "elle est en B à l'instant n ".

Posons $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$

Alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{3} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{2}{3} b_n \end{cases}$$

Donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$, on a : $X_{n+1} = MX_n$ (donc $X_n = M^n X_0 \dots$).