

Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Montrer que $A^2 = 3A$. En déduire A^n pour tout $n \geq 1$ (démontrer cette formule par récurrence).
- 2) a) Calculer B^2, B^3, B^4 . Quelle conjecture peut-on faire sur B^n ?
b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer qu'il existe des suites (a_n) et (b_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ (*)
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$
En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n , puis l'expression de A^n en fonction de n .
- 3) Pour $n = -1$, l'égalité (*) est-elle toujours valide ?

Exercice 3

Reprenons l'exercice 2 de la feuille n°2. :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } A = PDP^{-1}$$

Déterminer l'expression de A^n , pour tout $n \geq 1$. (on précisera tous les coefficients)

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = A - 2I$.

1. Calculer B^2 , puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = 2^n I + n2^{n-1}B$.
2. Retrouver la formule précédente à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 5

Partie A

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le nombre réel a tel que $A = aI + B$.
2. Calculer B^2, B^3 . En déduire B^k pour $k \geq 3$.
3. En déduire la valeur de A^n , pour $n \geq 2$.

Partie B

On considère trois suites a, b et c définies par : $a_0 = 1, b_0 = -1, c_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n - 2c_n \\ b_{n+1} = 2b_n + 4c_n \\ c_{n+1} = 2c_n \end{cases} \quad \text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on note } X_n \text{ la matrice définie par : } X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$, en déduire l'expression de X_n en fonction de n .
2. En déduire l'expression des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) en fonction de n .