Chapitre 17 : Les matrices - Feuille n°2

Exercice 1

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant, calculer leur inverse.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -11 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soient a,b et c des réels. Résoudre le système (S) d'inconnue x, y, z : $\begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$.

En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 3

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. En déduire les solutions du système :

$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
3. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}
4. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec D.

b. On admet que les matrices M' qui commutent avec D sont de la forme :

$M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble des matrices M qui commutent avec A.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet que P est inversible, que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et que $A = PTP^{-1}$.

1) Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que $AM = M = 0 \Leftrightarrow TN = N$.

2) Déterminer les matrices $N \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $TN = N$.

3) Déterminer les solutions de l'équation $AM = M$.