Chapitre 17 : Les matrices – Feuille d'exercices n°1

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices C = A + B, D = 3A, E = 4A – 3B

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Existe-t-il des nombres réels a,b et c tels que X = aA + bB + cC ? Si oui, déterminer-les.

2) Même question pour Y.

Exercice 3

Calculer le produit AB dans les cas suivants :

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1) Soient A et B deux matrices diagonales de $M_3(\mathbb{R})$. Montrer que le produit AB est aussi une matrice diagonale.

2) Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures de $M_3(\mathbb{R})$. Montrer que le produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 5

Déterminer toutes les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 = 9I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2) On considère maintenant la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $B^2 + B - 2I_3$. En déduire que B est inversible et déterminer B^{-1}.

3) On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $C^2 - 2C$.

En déduire que C n'est pas inversible. *(on pourra supposer que C est inversible et arriver à une contradiction).*