Chapitre 16 : Systèmes linéaires

1. Rappels sur les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

On considère un système (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ d'inconnues x et y.

2 méthodes pour résoudre un tel système :
_ par combinaison :
Principe : En multipliant les équations par des coefficients judicieusement choisis, et en les additionnant (ou en les soustrayant), on cherche à éliminer x ou y.

Ex : $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ \quad 11y = -33 \quad L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(-3) = -7 \\ \quad y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

OU : $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 11x \quad = 11 \quad L_2 \leftarrow L_1 + 3L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 3y = -7 \\ x \quad = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

Une solution : (1, -3).

_ par substitution :
Principe : Exprimer y en fonction de x (ou x en fonction de y) dans une des équations, et remplacer dans l'autre (intéressant si le coefficient est 1 ou -1).

Ex : $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ \quad y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(3x - 6) = -7 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 18 = -7 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

2. Systèmes linéaires de n équations à p inconnues

2.1 Notion de système linéaire

Définitions :
Soient n et p deux entiers. Soit $(a_{i,j})_{i \in \{1,..,n\}, j \in \{1,..,p\}}$ et $(b_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ deux familles de réels.

_ L'ensemble d'équations : (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \ (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \ (L_2) \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \ (L_n) \end{cases}$ est appelé système de n équations linéaires à p inconnues $x_1, ..., x_p$.

_ Résoudre ce système, c'est trouver toutes les p-listes $(x_1, ..., x_p)$ vérifiant simultanément les n équations; ces p-listes sont appelés solutions du système.
_ Deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

Cas particuliers :
_ si $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, on dit que le système est homogène.
Dans ce cas (0, ...,0) est solution.
_ une équation du type 'a = b', avec $a \neq b$ n'a pas de solutions, donc un système contenant une telle équation n'a pas de solution.
_ une équation, du type 'a = a' admet tous les p-uplets comme solutions. On peut l'éliminer du système sans en changer les solutions.
_ si pour tout i > j, $a_{i,j} = 0$, on dit que le système est triangulaire.

Exemples :

Ex : $(S_1)\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$ Une solution : $S = \{(1, -3)\}$

$(S_2)\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 0 = 12 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases}$ pas de solutions. $S = \emptyset$

$(S_3)\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 0 = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 3y = 5 \Leftrightarrow -3y = 5 - 2x$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{2x-5}{3}$ Une infinité de solutions $S = \left\{\left(x, \dfrac{2x-5}{3}\right), x \in \mathbb{R}\right\}$

2.2. Système linéaire de n équations à n inconnues

Définition :
Soit (S) un système de n équations à n inconnues.
On dit que (S) est un système de Cramer lorsque (S) admet une unique solution.

Exemple : Le système (S_1) est un système de Cramer. Les systèmes (S_2) et (S_3), non.

Remarques :
_ Un système homogène de n équations à n inconnues est un système de Cramer si et seulement il n'admet comme solution que la n-liste (0,...,0).
_ Un système de n équations à n inconnues est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est de Cramer.

2.3 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition – Propriété :
On appelle opérations élémentaires sur les lignes :
_ l'échange de deux lignes, noté $L_i \leftrightarrow L_j$
_ la multiplication d'une ligne par un nombre <u>non nul</u> : $L_i \leftarrow \alpha L_i$ $(\alpha \neq 0)$
_ la combinaison de deux lignes : $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ (<u>avec $\alpha \neq 0$</u>) **L_j restant <u>fixe</u>**
Tout système obtenu à partir d'un système (S) par des opérations élémentaires est équivalent à (S).

Remarque : Dans une combinaison, le coefficient de la ligne remplacée doit être impérativement différent de 0.

3. Systèmes triangulaires / Méthode du pivot de Gauss

3.1 Système triangulaire de n équations à n inconnues

On considère un système triangulaire : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + ... + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad .... \\ \quad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ \quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

Propriété : Un système triangulaire est un système de Cramer si et seulement si les <u>coefficients diagonaux sont tous non nuls</u>.

Remarques :
_ Pour résoudre un tel système, on "remonte" en déterminant x_n grâce à la dernière ligne, puis x_{n-1}, etc…
_ Il est parfois utile de changer l'ordre des inconnues (ou l'ordre des équations) pour faire apparaître un système triangulaire.

Exemples :

1) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ -y + 4z = 7 \\ 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ -y + 4z = 7 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Une solution : (1,1,2)

2) $\begin{cases} x - 5y + 2z = 5 \\ 3x = -9 \\ 2x + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y + 2z + x = 5 \\ z + 2x = 3 \\ 3x = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 9 \\ x = -3 \end{cases}$

3.2 Système triangulaire de n équations à p inconnues (n < p)

On considère le système : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad .... \\ \quad a_{nn}x_n + a_{n,n+1}x_{n+1} + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$

où les coefficients a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} sont tous non nuls.

Méthode :
Les inconnues x_1, …, x_n sont appelées inconnues principales, et les inconnues x_{n+1}, ..., x_p sont appelées inconnues secondaires.
En "passant à droite" les inconnues secondaires, on obtient un système triangulaire de n équations à n inconnues.
On obtient donc les valeurs de x_1, ..., x_n en fonction des inconnues secondaires.
Il y a une infinité de solutions.

Remarques :
_ Pour un système de n équations à p inconnues, il faut prendre p – n inconnues secondaires
_ Avant de choisir des inconnues secondaires (par forcément les dernières), il faut que le système soit triangulaire pour les autres inconnues.

Exemples :

1) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ -y + 4z = 7 \end{cases}$ on choisit z comme inconnue secondaire.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = z + 3 \\ -y = -4z + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2(4z - 7) = z + 3 \\ y = 4z - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{3}z + \frac{17}{3} \\ y = 4z - 7 \end{cases}$

$S = \{(-\frac{7}{3}z + \frac{17}{3};4z - 7;z), z \in \mathbb{R}\}$ Il y a une infinité de solutions.

2) (S) : $x + 2y + 3z = 0$ on choisit y et z comme inconnues secondaires

$x = -2y - 3z$ $S = \{(-2y - 3z;y;z), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

3.3 Méthode du pivot de Gauss

Principe : Transformer un système quelconque en système triangulaire.

Soit le système : (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$

Méthode :

- $1^{\text{ère}}$ étape :

si $a_{11} \neq 0$, a_{11} est appelé "premier pivot". (sinon, on échange L_1 avec une autre ligne)

_ on ne modifie pas la ligne L_1

_ pour chaque ligne L_k, $k \in \{2, .., n\}$, on effectue une combinaison avec L_1 pour que le coefficient $a_{k,1}$ s'annule. (on fait par exemple : $L_k \leftarrow a_{11}L_k - a_{k1}L_1$)

On obtient un système du type : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad .... \\ \quad a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$

- $2^{\text{ème}}$ étape : si $a_{22} \neq 0$, on le prend comme pivot. Sinon, on échange la ligne L_2 avec une ligne L_k ($k > 2$), pour obtenir $a_{22} \neq 0$.

On ne modifie plus les lignes L_1 et L_2. On modifie les lignes L_3 à L_n à l'aide de L_2 pour éliminer les coefficients en x_2.

On répète cette étape jusqu'à ce que le système soit triangulaire. (il y a au plus n étapes).

Exemple :

$\begin{cases} \mathbf{2x} + y - 3z = -5 & L_1 \\ x + 2y - 2z = -1 & L_2 \\ 3x - 5y - z = -10 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = -5 & L_1 \\ \mathbf{3y} - z = 3 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ 13y - 7z = 5 & L_3 \leftarrow 3L_1 - 2L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = -5 & L_1 \\ 3y - z = 3 & L_2 \\ 8z = 24 & L_3 \leftarrow 13L_2 - 3L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 9 = -5 \\ 3y - 3 = 3 \\ z = \frac{24}{8} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 - 9 = -5 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

3.4 Cas des systèmes à paramètres

Rappel :
Les opérations sur les lignes $L_i \leftarrow \alpha L_i$ et $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ ne sont possibles que si $\alpha \neq 0$!

Attention, dans la méthode du pivot de Gauss, il faut toujours que le pivot soit non nul !
Il vaut donc mieux choisir un pivot qui ne dépend pas du paramètre.
Sinon il faut étudier à part les valeurs qui annulent le pivot.

Quand le système est triangulaire, il faut étudier les valeurs qui annulent un des coefficients de la diagonale.

Exemple :

Soit λ un réel. Résoudre en fonction de λ le système (S_λ) : $\begin{cases} (4-\lambda)x - 3y = 0 \\ 6x + (-5-\lambda)y = 0 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + (-5-\lambda)y = 0 \\ (4-\lambda)x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + (-5-\lambda)y = 0 \\ ((-5-\lambda)(4-\lambda) + 18)y = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow (4-\lambda)L_1 - 6L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + (-5-\lambda)y = 0 \\ (\lambda^2 - \lambda - 2)y = 0 \end{cases}$ système triangulaire

2 racines $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -2$

_ si $\lambda = 1$: $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 6y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x$ $S = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

_ si $\lambda = -2$: $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x$ $S = \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\}$

_ si $\lambda \neq 1,-2$ (S) est un système de Cramer. Seule solution : (0,0).