

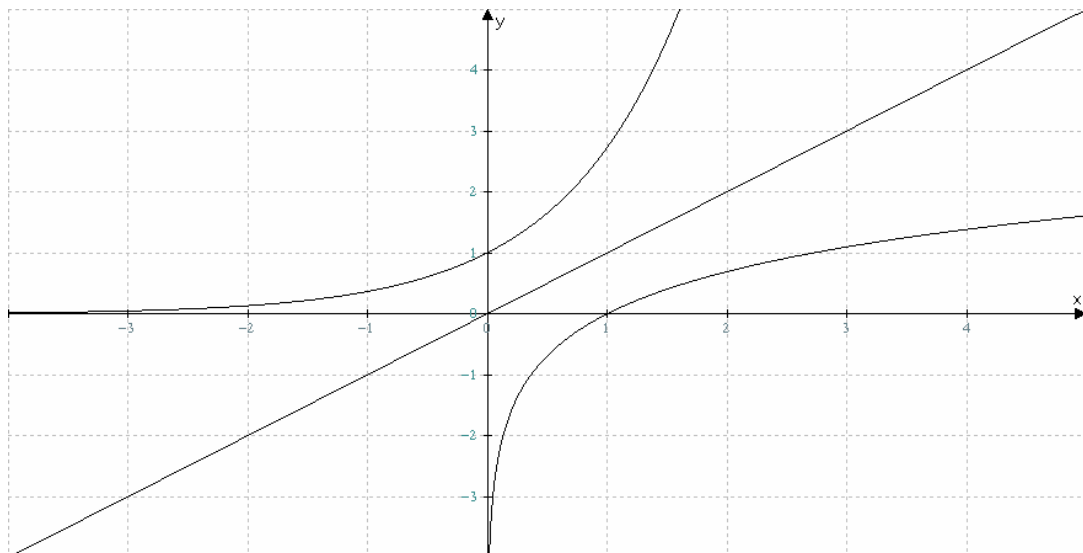
Chapitre 15 : Fonctions usuelles

1. Fonctions exponentielles et logarithmes

Rappel : exp et ln sont des applications réciproques.

$C_{\exp}$ et $C_{\ln}$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Fonction	exp	ln
Définie et C^∞ sur $I =$	$\mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
$f(I) =$	$]0; +\infty[$	$\mathbb{R}$
Signe	$x \rightarrow -\infty \quad +\infty$ $e^x \quad +$	$x \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$ $\ln(x) \quad - \quad 0 \quad +$
Limites et branches infinies	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ Branche parabolique direction (Oy) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ A.H. d'équation $y = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ Branche parabolique direction (Ox) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ A.V. d'équation $x = 0$
Dérivée	e^x	$\frac{1}{x}$
Variations	croissante	croissante
Convexité	$f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ convexe	$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ concave



2 Fonctions du type $x \mapsto u(x)^{v(x)}$

Rappel :

Soit a et b deux réels avec $a > 0$. On définit le nombre a^b par $a^b = e^{b \ln(a)}$.

Remarque :

$$\forall a > 0, a^0 = 1, a^1 = a, a^{-1} = \frac{1}{a}, a^{1/2} = \sqrt{a}, a^{1/3} = \sqrt[3]{a}, a^{3/2} = a \times a^{1/2} = a\sqrt{a} \dots$$

Soient u et v des fonctions définies sur un intervalle I .

La fonction $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$ n'est définie que si $u(x) > 0$.

Dans ce cas : $f(x) = e^{v(x) \ln(u(x))}$

C'est sous cette forme que l'on peut calculer la dérivée de f , ou ses limites.

Exemple :

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^x$

$$f(x) = e^{x \ln(x)} \quad f'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x \ln(x)} \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1/e$$

x	0	1/e	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	1	$1/e^{1/e}$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \text{ (croissances comparées)}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1. \quad f(1/e) = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} = \frac{1}{e^{1/e}}.$$

3. Fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On étudie la fonction $f : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\alpha \end{cases}$

$$\forall x > 0 \quad f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}$$

Si $\alpha = 0$, f est constante. On suppose maintenant $\alpha \neq 0$.

_ Dérivée, variations, convexité :

f_α est dérivable comme composée de fonctions dérivables et $f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

- si $\alpha > 0$ f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

- si $\alpha < 0$ f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

- si $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$, f est convexe

- si $0 < \alpha < 1$, f est concave

_ Limite en $+\infty$:

- si $\alpha < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ (A.H. d'équation $y = 0$)

- si $\alpha > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$

$\frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}$: - si $0 < \alpha < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = 0$: branche parabolique de direction (Ox).

- si $\alpha = 1$: C_f est une droite

- si $\alpha > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).

_ Limite en 0 :

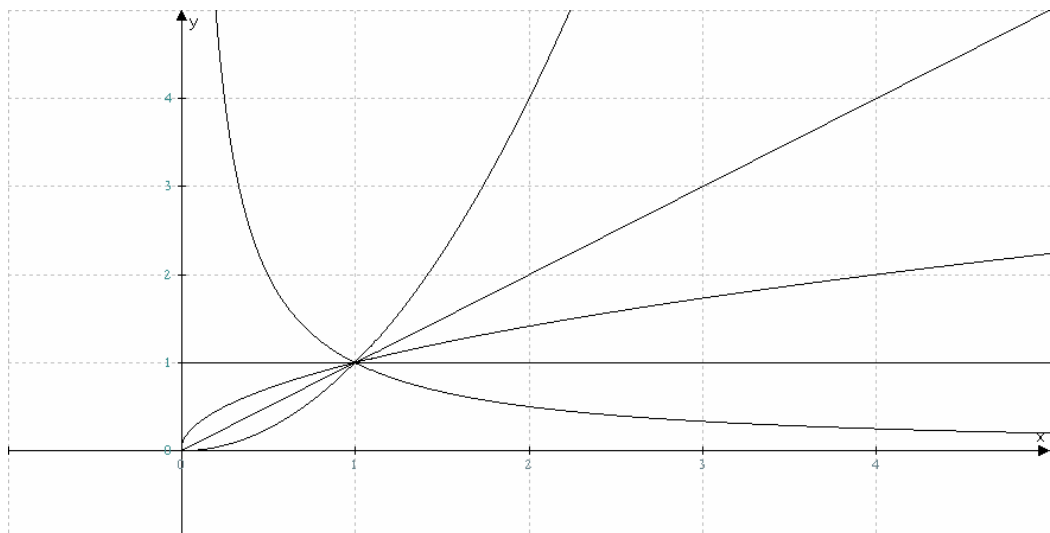
- si $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$ (A.V. d'équation $x = 0$)

- si $\alpha < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$: on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}$$

si $\alpha > 1$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$: demi-tangente horizontale

si $0 < \alpha < 1$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$: demi-tangente verticale

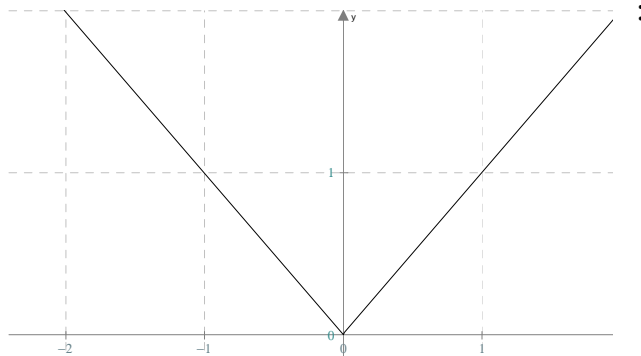


4. Fonction valeur absolue / Fonction partie entière

4.1 Valeur absolue

Définition : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Courbe



La fonction est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$

4.2 Partie entière

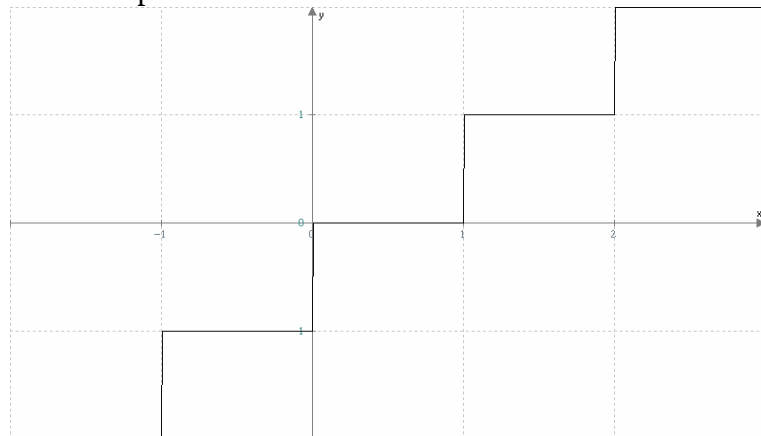
Définition : La fonction partie entière est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x , associe le plus grand entier inférieur ou égal à x . On note $\text{Ent}(x)$ ou $[x]$ ce nombre.

Exemple : $\text{Ent}(3,5) = 3$ $\text{Ent}(-3,5) = -4$

Remarque :

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Ent}(x) \leq x < \text{Ent}(x) + 1$ et $x - 1 < \text{Ent}(x) \leq x$

Courbe représentative :



Ent n'est pas continue en tout $n \in \mathbb{Z}$, mais est continue à droite.