

## Chapitre 14 : Applications de la dérivée – Feuille n°2

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = 2 + \ln(x)$ .

On donne  $\ln(3) \approx 1,10$  et  $\ln(4) \approx 1,39$

1) a) Montrer que  $f$  admet un unique point fixe  $\alpha$  sur  $[1; +\infty[$

b) Montrer que  $3 \leq \alpha \leq 4$ .

2) a) Etudier les variations de  $f$  et montrer que l'intervalle  $[3;4]$  est stable par  $f$ .

b) Montrer que  $\forall x \in [3;4], |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$ .

3) Soit  $u_n$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3;4]$ .

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$

c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$ . En déduire la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

4) Déterminer un rang  $n_0$  à partir duquel  $|u_n - \alpha| \leq 10^{-5}$ .

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 3$ . On note  $C_f$  la courbe de  $f$ .

1) Etudier les branches infinies de  $C_f$ .

2) Etudier les variations de  $f$ . (*indication :  $f'$  a deux racines évidentes*)

3) Etudier la convexité de  $f$ . On précisera les points d'inflexion éventuels, ainsi que l'équation de la tangente en ces points.

4) Tracer la courbe de la fonction  $f$ .