Chapitre 14 : Applications de la dérivée - Feuille n°1

Exercice 1

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3e^{-3x} - 9x + 9$.
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : l'une négative, α et l'autre positive, β.
En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-3x} - \frac{9}{2}x^2 + 9x$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2\ln(x) - x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, calculer f 'et déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$
3) f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
2) a) Montrer que f est continue en 0.
b) On admet que $xe^x - e^x + 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et préciser $f'(0)$.

Exercice 4

1) Montrer que $\frac{1}{3} \leq \ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2}$.
2) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$
(on pourra considérer la fonction $f(t) = \ln(t)$ sur un intervalle bien choisi)

Exercice 5

Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3 + u_n^2)$.

On pose $f : x \longmapsto \frac{1}{5}(3 + x^2)$.

1. a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 1]$ et montrer que $[0; 1]$ est un intervalle stable par f.
b) Déterminer l'unique point fixe $r \in [0 ;1]$ de f.
c) Montrer que $\forall x \in [0 ;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{5}$.

2. a) Montrer que $\forall n \geq 0$, $u_n \in [0 ;1]$.
b) Démontrer que $\forall n \geq 0$, $|u_{n+1} - r| \leq \frac{2}{5}|u_n - r|$ puis $|u_n - r| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
c) Déterminer un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - r| \leq 10^{-9}$.