Chapitre 13 : Dérivée d'une fonction

1. Dérivée en un point

1.1 Dérivabilité en un point

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$.
Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable en a.
Dans ce cas, on note $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. $f'(a)$ est appelé le nombre dérivé de f en a.
De même, si $\lim\limits_{x \to a_g} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, on définit la dérivée à gauche en a en posant $f'_g(a) = \lim\limits_{x \to a_g} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. (de même à droite).

Remarques :
_ En posant $x = a + h$ $(h = x - a)$, on a aussi :
f est dérivable en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ existe. Et dans ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$
_ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est appelé taux de variation de f entre a et x.

Exemples :
1) f définie par : $f(x) = x^2 + 3x - 1$
f dérivable en 2 ? $f(2) = 9$ $\quad \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 + 3x - 1 - 9}{x - 2} = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$ (F.I.)
$= \frac{(x - 2)(x + 5)}{x - 2} = x + 5$ donc $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 2 + 5 = 7$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 7$.
(avec formules de Term : $f'(x) = 2x + 3$ $\quad f'(2) = 7$)
2) f $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ dérivable en 0 ?
$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.
3) f définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. f est-elle dérivable en 0 ?
$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2\ln(x) - 0}{x} = x\ln(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ (croissances comparées), donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Remarque : Dans la recherche de limite, il est parfois intéressant de reconnaître la forme d'un taux de variation : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Exemple : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$: F.I. avec $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Or $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ (vérifier par forme conjuguée).

Propriété : Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration : pour $x \neq a$, $f(x) = f(x) - f(a) + f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a) \times 0 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Remarque : la réciproque est fausse ! f peut être continue sans être dérivable.
$x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais pas dérivable. Idem pour la valeur absolue.

Propriété : Développement limité d'ordre 1 de f en a
Si f est dérivable en a, alors $f(x) =_a f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a)$

Démonstration : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ donc il existe une fonction g telle que :
$\forall x \neq a$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.
Donc $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + (x - a)g(x)$ $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)g(x)$
Or $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x - a)g(x)}{(x - a)} = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ donc $(x - a)g(x) = o(x - a)$ CQFD.

Remarque : $f(a) + f'(a)(x - a)$ est donc une bonne approximation de f au voisinage de a (on parle d'approximation affine de f en a). Cette approximation sera utilisée dans la méthode de Newton (cf cours d'informatique).

1.2 Tangente

Définition : Si f est dérivable en a, alors on appelle tangente de C_f au point d'abscisse a la droite (T) qui passe par le point A(a;f(a)) et qui a pour coefficient directeur f '(a).

Propriété : L'équation de (T) est alors : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration : (T) a pour équation $y = mx + p$
D'après la définition $m = f'(a)$ donc $y = f'(a) \times x + p$
Comme (T) passe par A (a, f(a)), on a : $f(a) = f'(a) \times a + p$ donc $p = f(a) - f'(a) \times a$
Donc (T) a pour équation : $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2 + 3x - 1$ $f(2) = 9$ $f'(2) = 7$
Equation de la tangente : $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 7(x - 2) + 9 = 7x - 5$

Remarques :
_ si f est dérivable à gauche (à d.), on dit que C_f admet une demi-tangente à gauche (à droite)
_ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$, on dit que C_f admet une tangente verticale (d'équation x = a).
_ l'expression de la tangente est l'approximation affine de f. La tangente est la droite qui "approche" le mieux la courbe au voisinage de A(a;f(a)).
_ $f'(a) = 0 \Leftrightarrow C_f$ admet une tangente horizontale en a.
_ Lors du tracé d'une courbe après l'étude d'une fonction, les tangentes horizontales et les tangentes trouvées précédemment doivent obligatoirement apparaître ! (double flèche)
_ la courbe doit être effectivement tangente à ses tangentes.

2. Dérivée sur un intervalle

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si, pour tout a $\in$ I, f est dérivable en a, alors on dit que f est dérivable sur I.
Si f est dérivable sur I, on appelle fonction dérivée de f la fonction, notée f ', qui à tout x $\in$ I associe le nombre dérivé de f en x.

Remarque : f '(x) est aussi notée $\frac{df}{dx}$

2.1 Dérivées des fonctions usuelles

Propriété :

f	dérivable sur	f '
$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$, si $\alpha \in \mathbb{N}$ $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, si $\alpha \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ $]0;+\infty[$ sinon	$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Exemples : $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ pour $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété :
Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
_ $u + v$, λu, $u \times v$, u^2, $\frac{1}{v}$ (si v ne s'annule pas) et $\frac{u}{v}$ (si v ne s'annule pas) sont dérivables sur I et :

$(u + v)' = u' + v'$ $(\lambda u)' = \lambda u'$ $(uv)' = u'v + uv'$ $(u^2)' = 2uu'$ $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Démonstration : Soit a $\in$ I
Posons $f = u + v$

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{u(x) + v(x) - (u(a) + v(a))}{x - a} = \frac{u(x) - u(a)}{x - a} + \frac{v(x) - v(a)}{x - a}$ donc tend vers $u'(a) + v'(a)$

Posons $f = \lambda u$

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\lambda u(x) - \lambda u(a)}{x - a} = \lambda \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$ tend vers $\lambda u'(a)$

Posons $f = uv$

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = = \frac{u(x)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} = \frac{u(x)(v(x) - v(a)) + u(x)v(a) - u(a)v(a)}{x - a}$

$= u(x)\frac{v(x) - v(a)}{x - a} + v(a) \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$

u est dérivable, donc continue en a : $\lim\limits_{x \to a} u(x) = u(a)$

donc tend vers u(a)v'(a) + v(a)u'(a)

avec v = u, on obtient : $(u \times v)' = u'u + u u' = 2 u u'$

Posons $f = \dfrac{1}{v}$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\dfrac{1}{v(x)} - \dfrac{1}{v(a)}}{x - a} = \frac{\dfrac{v(a) - v(x)}{v(a)v(x)}}{x - a} = - \frac{1}{v(a)v(x)} \times \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \text{ tend vers } - \frac{1}{v(a)^2} \times v'(a)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - u \frac{v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple : $f(x) = x^2\ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ f est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$.

Propriété (dérivée d'une composée) :

Soit u est une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$.

Si u est dérivable en a et si si v est dérivable en f(a) alors $v \circ u$ est dérivable en a

$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v(u(a))$ $\quad ((v \circ u)' = u' \times v' \circ u)$

Démonstration :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x - a} = \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$$

u continue en a donc $\lim\limits_{x \to a} u(x) = u(a)$. Posons u(a) = b.

Comme $\lim\limits_{X \to b} \dfrac{v(X) - v(b)}{X - b} = v'(b) = v'(u(a))$, on obtient la formule

Corollaire :

Si u est une fonction dérivable sur I, alors :

_ $\forall n \in \mathbb{N}$, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = u' \times nu^{n-1}$ (idem avec u^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ si $u(x) > 0$ $\forall x \in I$)

En particulier : $(u^2)' = 2uu'$ $\quad (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\quad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

_ exp(u) est dérivable sur I et $(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$

_ si u ne s'annule pas sur I, $\ln(|u|)$ est dérivable sur I et $(\ln(|u|))' = \dfrac{u'}{u}$

Exemple : Soit $f(x) = \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^3$ sur $]-\infty;-1[\cup]-1; +\infty[$ $\quad f(x) = u(x)^3$

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et $\forall x \neq -1$, $f'(x) = 3 \times u'(x) \times u(x)^2$

$u'(x) = \dfrac{-(1 + x) - (1 - x)}{(1 + x)^2} = \dfrac{-2}{(1 + x)^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{-6}{(1 + x)^2} \times \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^2$

2.3 Dérivée d'une réciproque

Propriété :
Soit f une fonction bijective de I sur J.
Si f est dérivable sur I alors en tout $y \in J$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, f^{-1} est dérivable en y et
$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
Donc si f ' ne s'annule pas sur I, f^{-1} est dérivable sur J.

Démonstration :
Soit $b \in J$ tel que $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Posons $a = f^{-1}(b)$ ($\Leftrightarrow b = f(a)$)

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\dfrac{y-b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}$$

f est continue sur I, donc f^{-1} est continue sur J donc $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$.

Or $\lim\limits_{X \to a} \dfrac{f(X) - f(a)}{X - a} = f'(a)$. Donc $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Illustration graphique :
C_f^{-1} est l'image de C_f par la droite d'équation y = x.
Soit $a \in I$ et $b = f(a)$.
_ Si (T) est une tangente horizontale, son image est une tangente verticale.
Donc si $f'(a) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $b = f(a)$.
_ Une tangente (T) de coefficient directeur $m \neq 0$ a pour image une tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{m}$. Donc si (T_f) a pour coefficient directeur $f'(a)$, (T_{f-1}) a pour coefficient directeur
$\dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Conclusion :
Si on a f(a) = b
_ si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$
_ Si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en b. C_{f-1} admet une tangente verticale en b.

Exemples :
_ exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$. Donc la fonction réciproque, ln, est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $\forall\, x \in \,]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{\exp(\ln(x))} = \dfrac{1}{x}$
_ $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ On suppose qu'on a montré que f bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
Soit g son application réciproque.
$f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ donc f'' s'annule en 1.
$f(1) = \dfrac{1}{3}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1/3\}$ et $\forall\, y \in \mathbb{R} - \{1/3\}$, $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))} = \dfrac{1}{(g(y)-1)^2}$
En 1/3, C_g admet une tangente verticale.

3. Fonctions C^p, C^∞

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
_ Si f est une fonction dérivable sur I et si f ' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I, et la dérivée de f ', notée f '' ou $f^{(2)}$ est appelée dérivée d'ordre 2 de f.
_ On peut définir de la même manière $f^{(3)}$, …, $f^{(n)}$ …. De manière générale $f^{(n+1)} = f^{(n)\,'}$

Exemple :
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$ $f''(x) = 6x + 6$ $f^{(3)}(x) = 6$ $f^{(4)}(x) = 0$…

Définition :
_ Si f est continue sur I, on dit que f est C^0 sur I.
_ Si f est dérivable sur I et si f ' est continue sur I, alors on dit que f est de classe C^1 sur I.
_ Si $n \in \mathbb{N}$, si f est n-fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I, on dit que f est de classe C^n sur I
_ si $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n, on dit que f est de classe C^∞.

Propriété :
Les polynômes, la fonction exp sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction ln est C^∞ sur $]0; +\infty[$.

Propriété :
Soit n un entier naturel ou $+\infty$.
La somme, le produit, le quotient (s'il existe), la composée (si elle existe) de deux fonctions de classe C^n est une fonction de classe C^n.

Ex : la fonction $f(x) = x^2\ln(x)$ est C^∞ sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions C^∞