Chapitre 13 : Dérivée d'une fonction – Feuille n°1

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1) Montrer, en utilisant la définition, que f est dérivable en 2 et calculer f '(2).
2) Vérifier en utilisant les formules de dérivation.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
1) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer f '(0).

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \text{ si } x \geq 1 \\ x - 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$

f est-elle continue en 1 ? f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 4

1) En appliquant la définition de la dérivée à la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$ au point $a = 0$, démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

2) En procédant de manière analogue, démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Exercice 5

1) A l'aide d'un taux de variation, déterminer $\lim\limits_{x \to e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e}$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en utilisant un taux de variation, $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Soit C_f la courbe de f.
1) a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
b) Déterminer l'équation de cette tangente.
2) Déterminer le point de C_f où la tangente est horizontale.
3) Déterminer les variations de f.
4) Tracer C_f dans un repère bien choisi.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Etudier la continuité et la dérivabilité de cette fonction sur $[0; +\infty[$.
Interpréter graphiquement le résultat.