

1. Notion d'application

1.1 Définitions

Définition :

Soient A et B des ensembles. Une application f de A vers B associe à tout élément x de A un unique élément y de B. On note $y = f(x)$.

y es l'image de x par f. x est un antécédent de y par f.

A est appelé l'ensemble de définition de l'application f. B est appelé l'ensemble image.

_ si X est une partie de A, on appelle image de X par f, notée $f(X)$, l'ensemble des images des éléments de x. $f(X) = \{f(x), x \in X\}$

$f(X)$ est un sous-ensemble de B.

_ si Y est une partie de B, on appelle image réciproque de Y par f, notée $f^{-1}(Y)$, l'ensemble des antécédents des éléments de Y. $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$

$f^{-1}(Y)$ est un sous-ensemble de A.

Exemple :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

$$f(\mathbb{R}) = [0 ; +\infty[, f([0 ; 2]) = [0 ; 4] \quad f([-3 ; -1]) = [1 ; 9]$$

$$f^{-1}([0 ; 1]) = [-1 ; 1].$$

Définition :

Soit A et B deux ensembles et A' une partie de A.

Si f est une application de A vers B, g une application de A' vers B, et si $\forall x \in A', g(x) = f(x)$, on dit que g est la restriction de f à A', ou que f est un prolongement de g sur A.

Définition : Soit E un ensemble. On appelle application identité de E l'application :

$$\text{id}_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

Définition:

Soient A, B et C trois ensembles.

Soit f est une application de A vers B et g est une application de B vers C.

L'application, notée $g \circ f$, $\begin{cases} A \longrightarrow C \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$ est appelée composée de f suivie de g.

Remarque :

Soit f une application de A vers B. Alors $f \circ \text{id}_A = f$ et $\text{id}_B \circ f = f$.

Démonstration : $\forall x \in A, (f \circ \text{id}_A)(x) = f(\text{id}_A(x)) = f(x)$
 $(\text{id}_B \circ f)(x) = \text{id}_B(f(x)) = f(x).$

1.2 Injectivité - Surjectivité – Bijectivité

Définition :

Soit f une application de l'ensemble A vers l'ensemble B .

_ on dit que f est injective si deux éléments distincts de A ont toujours des images distinctes dans B . (donc f est injective si tout élément de B admet au plus un antécédent par f).

$$\forall (x, x') \in A^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

_ on dit que f est surjective si $f(X) = B$, c'est-à-dire si tout élément de B admet au moins un antécédent par f .

$$\forall y \in B, \exists x \in A, \text{ tel que } f(x) = y.$$

_ on dit que f est bijective si f est injective et surjective (c'est-à-dire tout élément de B admet exactement un antécédent par f).

Remarques :

_ f injective signifie que $\forall y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution.

_ f surjective signifie que $\forall y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution.

_ f bijective signifie que $\forall y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution.

Exemples :

1) patates

2) Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + 1 \end{cases}$ $f(-1) = 2$ $f(1) = 2$ donc 2 a deux antécédents. Donc f n'est pas injective.

f surjective ? 0 n'a pas d'antécédent ($x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ impossible). Donc f n'est pas surjective.

3) Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x - 1 \end{cases}$

_ f injective ? $f(x) = f(x') \Leftrightarrow 2x - 1 = 2x' - 1 \Leftrightarrow 2x = 2x' \Leftrightarrow x = x'$ donc f injective

si $y \in \mathbb{R}$, on résout l'équation $g(x) = y$ $2x - 1 = y$ $2x = y + 1$ $x = \frac{y+1}{2}$ L'équation a

toujours une et une seule solution.

Donc g est bijective.

1.3 Application réciproque

Définition

Soit A et B deux ensembles.

Soit f une application de A vers B . On dit que f admet une application réciproque s'il existe une application f^{-1} de B vers A telle que : $\forall x \in A, \forall y \in B, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Propriété :

Si $f: A \longrightarrow B$ admet une application réciproque f^{-1} , alors

$$\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$$
$$(f^{-1} \circ f = \text{Id}_A) \quad (f \circ f^{-1} = \text{Id}_B)$$

Démonstration :

Posons $y = f(x)$ donc $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = x$

Posons $x = f^{-1}(y)$ donc $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$

Propriété : Soit f une fonction de A vers B . Alors f admet une application réciproque si et seulement si f est bijective.

Remarque : Pour chercher l'expression de la fonction f^{-1} , on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x .

Exemples :

1) Patates

2) Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x - 1 \end{cases}$

On a vu que f est bijective, donc f admet une réciproque.

Der plus, $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$. Donc $f^{-1} \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \frac{y+1}{2} \end{cases}$

3) la fonction carré : $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est bijective. Son application réciproque est la fonction racine carrée. ($x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$)

_ la fonction exp : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[\\ x \longmapsto e^x \end{cases}$ est bijective. Son application réciproque est la fonction ln. ($y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$)

Remarques : _ Si f est bijective, alors $(f^{-1})^{-1} = f$.

_ si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2. Généralités sur les fonctions numériques

Dans toute cette partie, les fonctions sont définies sur une partie de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$.

On appelle courbe de f l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x, f(x))$, où $x \in D$.

2.1 Restrictions du domaine d'étude

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

_ on dit que f est paire si et seulement si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$

_ on dit que f est impaire si et seulement si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Propriété :

Si f est paire, la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est un axe de symétrie de la courbe C_f .

Si f est impaire, le point $O(0 ; 0)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f .

Exemples :

_ la fonction carré, la fonction valeur absolue, de manière générale $f(x) = x^n$ avec n pair, sont paires.

_ la fonction inverse, la fonction cube et de manière générale $f(x) = x^n$ avec n impaire, sont impaires.

_ soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{3+x^2}$

$f(-x) = \frac{-x}{3+(-x)^2} = -\frac{x}{3+x^2} = -f(x)$. Donc f est impaire.

Définition : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et $T > 0$. On dit que f est périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.

Remarque :

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction périodique, on trace la courbe sur un intervalle d'amplitude T , puis on reproduit le graphe par translation.

2.2 Variations et bornes

Définition :

Soit f définie sur un intervalle I .

On dit que f est croissante sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

On dit que f est décroissante sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

_ On dit que f atteint un maximum en x_0 si $\forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)$.

minimum en $x_0,$ $f(x) \geq f(x_0)$.

_ On dit que le réel M est un majorant de la fonction f si $\forall x \in D, f(x) \leq M$.

m minorant $f(x) \geq m$.

_ Une fonction à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Ex : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 0$ donc 0 est un minorant de la fonction \exp sur \mathbb{R} , mais n'est pas un minimum (car n'est pas atteint).

Propriété : Limite d'une fonction monotone

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b[$.

Si f est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en b .

Si f est croissante et non majorée, alors f a pour limite $+\infty$ en b .

Remarque : il existe des propriétés analogues pour une fonction décroissante et minorée ou sur un intervalle du type $]a ; b]$.

3. Continuité d'une fonction

3.1 Opérations sur les fonctions continues

Rappel : Soit f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Si f est continue en tout point de I , on dit que f est continue sur I .

Propriété :

Les fonctions constantes, affines, polynômes sont continues sur \mathbb{R} .

\exp est continue sur \mathbb{R} , \ln est continue sur $]0; +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$, $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} .

Propriété : (continuité et opérations)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

_ si f est continue sur I , alors λf est continue sur I .

_ si f et g sont continues sur I , alors $f + g$ et fg sont continues sur I .

_ si f et g sont continues sur I , et si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Ex : Soit $f(x) = \frac{(2x^2 - 1 + e^x)}{\ln(x)}$ (sur $]1; +\infty[$ le numérateur est continu, comme somme de fonctions continues. f est continue, car quotient de fonctions continues.

Propriété : (continuité et composée)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$.

Si f est continue sur I et si g est continue sur J , alors $g \circ f$ est continue sur I .

Exemple :

$f(x) = e^{1/1-x^2}$ sur $] -1; 1 [$ $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est continue $x \mapsto e^x$ est continue, donc f est continue comme composée de fonctions continues.

Remarque :

Si f est définie par différentes expressions, on étudie la continuité de f sur les intervalles ouverts aux points de raccordement, et à part les points de raccordement.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} f(x) = x \ln(x) \text{ sur }]0; +\infty[\\ f(x) = 0 \text{ sur }]-\infty; 0] \end{cases}$.

_ sur $] -\infty; 0[$, f est constante, donc continue

_ sur $]0; +\infty[$, f est continue car produit de fonctions continues

_ en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \ln(x) = 0$ (croissances comparées)

$\lim_{x \rightarrow 0, x \leq 0} f(x) = 0$ donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur \mathbb{R} .

3.2 Propriétés des fonctions continues

Remarques :

- _ On appelle segment un intervalle du type $I = [a;b]$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.
- _ Le "théorème des valeurs intermédiaires" vu en Terminale n'est pas ce qu'on appellera à présent le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème des valeurs intermédiaires :

- L'image d'un segment par une application continue est un segment.
- L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Corollaire :

Toute fonction continue sur un segment y admet un maximum et un minimum.

Remarque : Le TVI signifie que si f est continue sur un intervalle $[a;b]$, alors tout réel y compris entre deux images admet au moins un antécédent. (\Leftrightarrow l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution).

4. Fonctions continues monotones

4.1 Image par une fonction continue monotone

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

_ si f est croissante sur $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [f(a) ; f(b)]$

_ si f est décroissante sur $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [f(b) ; f(a)]$

Soit f une fonction continue sur $]a;b[$ (a, b réels ou $+\infty$ ou $-\infty$)

_ si f est croissante sur $]a;b[$, alors $f(]a;b[) =] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$

_ si f est décroissante sur $]a;b[$, alors $f(]a;b[) =] \lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

(De même pour des intervalles du type $[a;b[$ ou $]a;b]$.)

Exemple :

$f \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ f est continue sur \mathbb{R}

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$ $f(]-\infty; 0]) = [0; +\infty[$ $f(]-2; -1]) =]1; 4]$

$f(]-2; 1]) = [0; 4[$. ($\neq [1; 4[$!!!)

4.2 Théorème de la bijection

Théorème de la bijection : (1^{ère} version)

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$

Exemple : Soit $f(x) = 3e^{2x} - 4$ sur \mathbb{R} .

_ f est continue sur \mathbb{R}

_ $f'(x) = 6e^{2x} > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

_ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$. Donc $f(\mathbb{R}) =]-4; +\infty[$

Donc f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]-4; +\infty[$.

Propriété :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Alors elle admet une application réciproque f^{-1} , qui est continue sur $f(I)$, strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f .

De plus la courbe représentative de f^{-1} et la courbe représentative de f sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

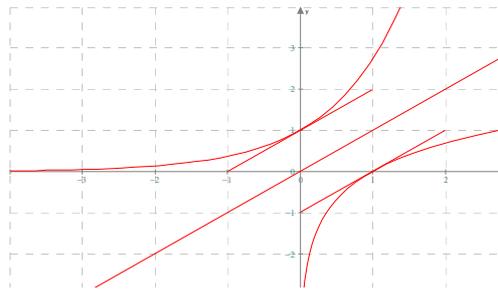
Remarque : si a et b sont finis ou infinis, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = a$.

Exemple : La fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc \exp réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$.

Sa fonction réciproque, \ln , est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Courbe :



Théorème de la bijection : (2 ème version)

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors $\forall y_0 \in f(I)$, l'équation $f(x) = y_0$ admet une et une seule solution $x_0 \in I$.

Remarques : _ Il faut bien vérifier que $y_0 \in f(I)$!

_ on a donc $f(x_0) = y_0$ (c'est-à-dire $x_0 = f^{-1}(y_0)$, puisque f est bijective et admet une application réciproque)

Exemple : Soit $f(x) = e^x + x - 2$ sur $[0; +\infty[$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[0; +\infty[$. Montrer que $x_0 < 2$.

_ $f'(x) = e^x + 1 > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$
	-1	\nearrow

f est continue et strictement croissante de $[0; +\infty[$ sur $[-1; +\infty[$
 $0 \in [-1; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[0; +\infty[$.

_ $f(x_0) = 0$ $f(2) = e^2 > 0$ donc $f(x_0) < f(2)$. f est croissante donc $x_0 < 2$.

4.3 Application aux suites implicites

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f_n une fonction définie sur un intervalle I .

Dans certains exercices, on va montrer, grâce au théorème de la bijection) que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ (ou ...) admet une solution unique qu'on notera x_n .

On définit ainsi une suite de manière implicite : on ne connaît pas l'expression de x_n , on sait seulement que $f_n(x_n) = 0$. On cherche pourtant à étudier cette suite (variations, bornes, limite, équivalent...).

_ la seule chose qu'on sait sur x_n , c'est que : $f_n(x_n) = 0$

_ pour comparer x_n avec un nombre, il faut souvent comparer les images par f_n et utiliser le sens de variation de f_n . (attention à ne pas confondre le sens de variation de f et celui de (x_n) !).

_ pour étudier les variations de x_n , on étudie souvent le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, puis on compare $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.

_ pas de récurrence en général avec des suites implicites (car pas de relation de récurrence)

Exemple :

Soit $n \geq 1$ et f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = nx - e^{-x}$

1) Montrer que $\forall n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n .

2) Montrer que $\forall n \geq 1$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire que (x_n) est décroissante.

4) Montrer que $\forall n \geq 1$, $nx_n = e^{-x_n}$. En déduire un équivalent de x_n .

1) $\forall n \geq 1$, $f_n'(x) = n + e^{-x} > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n(x)$		$+\infty$

↗

f_n est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , et $0 \in f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

2) $f_n(0) = -1 < 0$ $f_n(x_n) = 0$ $f_n(1/n) = 1 - e^{-1/n} - \frac{1}{n} < 0$ donc $e^{-1/n} < 1$ donc $1 - e^{-1/n} > 0$

Donc $f_n(0) \leq f_n(x_n) \leq f_n(1/n)$ f_n est croissante donc $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)e^{-x} - e^{-x} - (nx - e^{-x}) = x$
donc $f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) = x_n \geq 0$ $f_{n+1}(x_n) \geq 0$ or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

Donc $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$ f_{n+1} est croissante donc $x_n \geq x_{n+1}$

Donc (x_n) est décroissante.

4) $f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow nx_n - e^{-x_n} = 0 \Leftrightarrow nx_n = e^{-x_n}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x_n} = 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\frac{1}{n}} = 1$ donc $x_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$

4.4 Théorème du point fixe

Rappel : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle point fixe de f tout $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

Théorème du point fixe : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et telle que $f(I) \subset I$.

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si (u_n) converge vers un réel L , alors L est un point fixe de f . ($\Leftrightarrow L = f(L)$)

Remarque :

Pour montrer l'existence d'un point fixe d'une fonction f , on peut pas utiliser le théorème de la bijection pour l'équation $f(x) = x$ (x n'est pas une constante)

il faut étudier la fonction $g(x) = f(x) - x$ et étudier (grâce au théorème de la bijection) les solutions de l'équation $g(x) = 0$. ($f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$.)

Exemple : Soit $f(x) = \ln(x) + 2$ sur $[1; +\infty[$. Montrer que f admet un point fixe.

Posons $g(x) = f(x) - x = \ln(x) + 2 - x$ $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0$ sur $[1; +\infty[$

$g(1) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$.

g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, et $0 \in]-\infty; 1]$, donc l'équation $g(x) = 0$ ($\Leftrightarrow f(x) = x$) admet une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$

Donc f admet un unique point fixe sur $[1; +\infty[$.