Chapitre 12 : Fonctions – Feuille n°3

Exercice 1

Soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $x_n \in]0;1]$.

2. Déterminer x_0.

3. a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

b) En déduire que $f_{n+1}(x_n) > 0$ puis que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

4. a) Montrer que (x_n) converge.

b) On admet que $\forall x \in]0; +\infty[$, $x - \ln(x) > 0$.

Montrer que $\forall n \geq 1$, $x_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - 2$

1) Montrer que f admet deux points fixes : l'un strictement négatif, noté α, et l'autre strictement positif, noté β. Montrer que $-2 \leq \alpha \leq -1$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On admet que (u_n) est décroissante et minorée par -2.

Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Chapitre 12 : Fonctions – Feuille n°3

Exercice 1

Soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $x_n \in]0;1]$.

2. Déterminer x_0.

3. a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

b) En déduire que $f_{n+1}(x_n) > 0$ puis que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

4. a) Montrer que (x_n) converge.

b) On admet que $\forall x \in]0; +\infty[$, $x - \ln(x) > 0$.

Montrer que $\forall n \geq 1$, $x_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - 2$

1) Montrer que f admet deux points fixes : l'un strictement négatif, noté α, et l'autre strictement positif, noté β. Montrer que $-2 \leq \alpha \leq -1$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On admet que (u_n) est décroissante et minorée par -2.

Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.