Chapitre 12 : Fonctions : Feuille d'exercices n°2

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x + 1$.
1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites.
2) En déduire $f([-\frac{1}{2} ; +\infty[)$, $f([-3;-1])$, $f([-1;2])$.

Exercice 2
On définit la fonction ch sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (*ch est appelée cosinus hyperbolique).*
Justifier que ch réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $[e; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
1) Montrer que f réalise une bijection de $[e; +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera. On appelle g son application réciproque.
2) Etudier la continuité de g et tracer son tableau de variations. Que peut-on dire de la courbe de g ?

Exercice 4
1) On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^3}{x^2+1} \end{cases}$. Etudier les limites et les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $\frac{x^3}{x^2+1} = 1$ admet une et une seule solution α sur $\mathbb{R}$.
Justifier que $1 \leq \alpha \leq 2$.

Exercice 5
Déterminer le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation suivante : (E) : $2x^3 - 3x^2 - 12x = 1$

Exercice 6
Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation
$x^3 + 3x^2 - 1 = m$.

Exercice 7 (d'après EDHEC 95) n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
On considère la fonction f_n définie, pour tout réel x, par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.
1. Etudier les variations de f_n.
2. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. En conclure que la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nu_n = 1 - u_n^5$. En déduire un équivalent de (u_n).