Chapitre 12 : Fonctions Feuille n°1

Exercice 1

1) Soit $f : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{7 - 3\ln(x)}{4} \end{cases}$. Montrer que f est injective

2) Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$. Calculer g(1) et g(-1). g est-elle injective ?

Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $g(x) = -x^2 + 3x - 4$.
1) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que g n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 3 Soit f la fonction : $\begin{cases} \mathbb{R} - \{-4/5\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1 - 3x}{4 + 5x} \end{cases}$

1) Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x. A quelle condition sur y l'équation admet-elle une solution ?
2) En déduire que f réalise une bijection entre $\mathbb{R} - \{-4/5\}$ et un ensemble que l'on précisera. Déterminer sa fonction réciproque.

Exercice 4

Soit f la fonction : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3e^{-2x + 1} \end{cases}$. On admet que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.
1) Calculer f (1/2). En déduire $f^{-1}(3)$.
2) Déterminer l'expression de f^{-1}.

Exercice 5

Soit $f : [0 ;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln\left(\dfrac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}\right)$.
On admet que f réalise une bijection de $[0 ;1[$ sur $]-\infty ;0]$. Donner l'expression de sa réciproque.

Exercice 6

Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité des fonctions :
$\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\qquad g(x) = \ln\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)$

Exercice 7

1) Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = e^{-1/(x-1)^2} \text{ si } x > 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$
Montrer que f est continue sur $[1; +\infty[$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ -3x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.