

Chapitre 10 : Loix finies usuelles

1. Loi uniforme

Définition :

Soit X une VAR telle que $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$. ($=[[1;n]]$)

On dit que X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.

On note $X \rightarrow U([1;n])$

Cas d'application :

Si X prend les valeurs de 1 et n de manière équiprobable, alors $X \rightarrow U([1;n])$.

Propriété :

Soit X une VAR qui suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Démonstration :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} \\ &= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

Exemple :

On lance un dé équilibré et on note X le résultat.

Il y a équiprobabilité donc X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$.

Donc $\forall k \in \{1, \dots, 6\}$ $P(X = k) = \frac{1}{6}$.

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}}$$

2. Loi de Bernoulli

Définition :

Soit X une V.A.R. telle que $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Soit $p \in [0;1]$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (notée $B(p)$ ou $B(1,p)$) si

$$\begin{cases} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$

On note souvent $q = 1 - p$.

Cas d'application :

Soit S un événement appelé "succès" de probabilité p. ($\overline{S}$ = "échec" a pour probabilité 1-p)

Soit X la variable aléatoire définie par : $\begin{cases} X = 1 \text{ si } S \text{ est réalisé} \\ X = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

On dit que l'expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli.

Propriété :

Si $X \rightarrow B(1,p)$ alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p) = pq$.

Démonstration :

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Exemple :

On lance un dé équilibré. Soit X la VAR qui vaut 1 si obtient le numéro 6 et 0 sinon.

Obtenir 6 est une épreuve de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{6}$.

$$\text{Donc } X \rightarrow B(1, 1/6). \text{ Donc } E(X) = \frac{1}{6} \quad V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36} \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

3. Loi binomiale

Définition :

Soit X une VAR telle que $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$.

S'il existe $p \in [0;1]$ tel que $\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, alors on dit que X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p.

Remarques :

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n \quad (\text{formule du binôme de Newton})$$

$$= 1^n = 1 : \text{il s'agit bien d'une probabilité}$$

$$\text{pour } n = 1, \text{ on trouve } P(X = 0) = \binom{1}{0} p^0 (1 - p)^{1-0} = 1 - p$$

$$P(X = 1) = \binom{1}{1} p^1 (1 - p)^{1-1} = p \quad \text{On retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p. D'où la notation } B(1,p).$$

Propriété :

Soit S le succès d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

On effectue n fois et de manière indépendante cette épreuve.

Soit X le nombre de succès obtenus. Alors $X \rightarrow B(n,p)$.

Démonstration :

$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$. Si $k \in \{0, \dots, n\}$ ($X = k$) : k succès, n - k échecs.

Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités d'obtenir k succès parmi n épreuves. Chacune de ces possibilités a la même probabilité.

$P(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k \cap \overline{S_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{S_n}) = p \times p \times \dots \times p \times (1-p) \times \dots \times (1-p)$ (car les événements sont indépendants)

$$= p^k (1-p)^{n-k}$$

Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Propriété :

Soit X une VAR qui suit une loi binomiale $B(n,p)$.

Alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Démonstration pour l'espérance : (variance : démo vue en 2^{ème} année)

Considérons que X est le nombre de succès lors de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Soient $X_1, \dots, X_n$ les variables de Bernoulli liées à ces épreuves de Bernoulli.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si succès à la } i \text{ ème épreuve} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$X_1 + \dots + X_n$ est le nombre de succès. Donc $X = X_1 + \dots + X_n$.

Donc $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + \dots + p = np$

Exemple :

On lance 5 fois un dé équilibré. Soit X le nombre de 6 obtenus.

Obtenir 6 à un tirage est une épreuve de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{6}$.

Les lancers sont des épreuves indépendantes et X est le nombre de succès.

Donc X suit la loi binomiale de paramètre $\frac{1}{6}$ et de taille 5.

Donc $\forall k \in \{0, \dots, 5\}$, $P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad V(X) = 5 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36}$$

4. Loi hypergéométrique

Définition :

Soit n, N deux entiers tels que $n \leq N$ et $p \in]0;1[$.

On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètre N, n, p , notée $H(N,n,p)$ si pour tout k

tel que $0 \leq k \leq pN$ et $0 \leq n - k \leq N - pN$, $P(X = k) = \frac{\binom{pN}{k} \binom{N-pN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Propriété :

Soit E un ensemble à N éléments dont une proportion p d'éléments de type A.

(les autres étant de type B).

On choisit n éléments distincts de E (tirages simultanés ou successifs sans remise).

Soit X le nombre d'éléments de type A choisis

Alors $X \longrightarrow H(N, n, p)$.

Démonstration :

Il y a donc pN éléments de type A et $N - pN$ éléments de type B.

Valeurs prises par X :

Si on prend k éléments de type A, on prend $n - k$ éléments de type B.

Donc il faut que $0 \leq k \leq pN$ et $0 \leq n - k \leq N - pN$

$$\text{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$$

Pour ces valeurs de k , $P(X = k) = \frac{\binom{pN}{k} \binom{N-pN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ (on choisit k éléments de type A et $n - k$

éléments de type B). Donc $X \longrightarrow H(N,n,p)$.

Remarques :

– Autrement dit, s'il y a N_A éléments de type A et N_B éléments de type B, alors

pour k tel que $0 \leq k \leq N_A$ et $0 \leq n - k \leq N_B$, $P(X = k) = \frac{\binom{N_A}{k} \binom{N_B}{n-k}}{\binom{N_A + N_B}{n}}$

– Si les tirages étaient avec remise, on aurait $X \longrightarrow B(n,p)$ (donc ne dépendrait pas de N).

Propriété (admise) :

Si X suit la loi hypergéométrique $H(N,n,p)$ alors $E(X) = np$.

Exemple :

Dans une urne, il y a 5 boules noires et 6 boules rouges.

On tire simultanément 8 boules de cette urne. Soit X le nombre de boules noires tirées.

Il y a une proportion de $\frac{5}{11}$ de boules noires dans l'urne. On tire 8 boules sans remise dans

cette urne. Donc X suit la loi hypergéométrique $(11,8,5/11)$.

$$X(\Omega) = \{2,3,4,5\}$$

$$\forall k \in \{2,3,4,5\}, P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{6}{8-k}}{\binom{11}{8}} \quad E(X) = 8 \times \frac{5}{11} = \frac{40}{11}.$$

Conclusion : A retenir

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme $U([1;n])$	Equiprobabilité	$\{1, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $B(1,p)$	succès de probabilité p $X = 1$ si succès $X = 0$ sinon	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1 - p$ $P(X=1) = p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $B(n,p)$	n épreuves de Bernoulli indépendantes X = nombre de succès	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Hypergéométrique $H(N,n,p)$	n éléments distincts choisis dans N, dont pN de type A X = nombre d'éléments de type A choisis	$0 \leq k \leq Np$ $0 \leq n-k \leq N - Np$	$\frac{\binom{pN}{k} \binom{N-pN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	A calculer