Chapitre 1 : Egalités et inégalités

1. Règles sur les égalités

Attention à retenir toutes ces égalités dans les deux sens !

1.1 Produits et quotients

Définition :
Développer, c'est transformer un produit (ou un quotient) en somme.
Factoriser, c'est transformer une somme en produit (ou quotient).

Développements à connaître :
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
On verra cette année une formule générale pour $(a + b)^n$

Méthodes pour factoriser :
1) Trouver un facteur commun : Ex : $-3x^2 + 2x = x(-3x + 2)$
2) Reconnaître une égalité remarquable (souvent la troisième !) :
Ex : $(x - 3)^2 - 4 = (x - 3)^2 - 2^2 = (x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = (x - 5)(x - 1)$
3) Avec des quotients : mettre sous le même dénominateur :
$-2 + \frac{3}{x + 1} = \frac{-2(x + 1)}{x + 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{-2x + 1}{x + 1}$

Quotients : $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$ $\qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $\qquad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

Attention : _ on ne peut pas diviser par 0 !
_ $\frac{a + c}{b + c}$ n'est pas égal à $\frac{a}{b}$!!!

Pour simplifier une fraction, il faut d'abord factoriser numérateur et dénominateur par un même terme. Ex : $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x(x - 1)} = \frac{x + 1}{x}$

1.2 Puissances

Définition : si $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b\ln(a)}$

Propriétés :

si $a > 0$ $\quad a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^b \times a^c = a^{b + c} \quad \frac{1}{a^c} = \left(\frac{1}{a}\right)^c = a^{-c} \quad \frac{a^b}{a^c} = a^{b - c} \quad (a^b)^c = a^{bc}$

si $a > 0$ et $b > 0$, $a^c \times b^c = (ab)^c \quad \frac{1}{b^c} = \left(\frac{1}{b}\right)^c \quad \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$

Attention : _ on ne peut pas transformer $a^c + b^c$!!
_ $2 \times 3^n \neq 6^n$!! $(-1)^n \neq -1^n$!!

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} = a^n \times a$

1.3 Racines carrées

Attention : Soit $a \in \mathbb{R}$. $\sqrt{a}$ n'a de sens que si $a \geq 0$.

Propriété :
Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Alors
$(\sqrt{a})^2 = a$ $\sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ si $b > 0$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Attention : _ on ne peut pas transformer $\sqrt{a + b}$!
_ $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$

Remarque : Pour modifier une expression du type $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, on peut utiliser la "forme conjuguée" :
On fait apparaître un produit de la forme $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b$

Exemple : $\forall x \geq 1$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$
$= \dfrac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \dfrac{x + 1 - (x - 1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

1.4 Fonctions exp et ln

Propriété :
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\ln(e^a) = a$
Pour tout $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$

Pour tous $a,b \in \mathbb{R}$ $e^0 = 1$ $e^1 = e$ $e^a \times e^b = e^{a+b}$ $\dfrac{1}{e^b} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^b = e^{-b}$ $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $(e^a)^b = e^{ab}$
Pour tous $a, b > 0$ $\ln(1) = 0$ $\ln(e) = 1$
$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$ $-\ln(b) = \ln\left(\dfrac{1}{b}\right)$ $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$
$\dfrac{1}{2}\ln(a) = \ln(\sqrt{a})$ $b\ln(a) = \ln(a^b)$
Attention, on ne peut pas transformer $\ln(a + b)$!
$\ln(x)$ n'existe que si $x > 0$

2. Autour des inégalités

2.1 Règles sur les inégalités

Remarque générale
A partir d'une inégalité, pour obtenir une inégalité équivalente, il faut effectuer la **même opération mathématique** à gauche et à droite du signe d'inégalité.
Attention, "passer à gauche" ou "passer à droite" n'ont jamais été des opérations mathématiques

Propriété :
Ajouter (ou soustraire) un nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens.
Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif les deux membres ne change pas le sens.
Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif les deux membres change le sens.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x > 3 \Rightarrow -\frac{2x}{3} + 6 < 4$

$x > 3 \Rightarrow \frac{2x}{3} > \frac{2\times 3}{3} \quad -\frac{2x}{3} < -2 \quad -\frac{2x}{3} + 6 < -2 + 6 \quad -\frac{2x}{3} + 6 < 4$

2.2 Inégalités et variations des fonctions

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante sur I si pour tous $a \in I$ et $b \in I$, $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$
On dit que f est décroissante sur I si pour tous $a \in I$ et $b \in I$, $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$.

Rappels :
La fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$
La fonction racine est croissante sur $[0;+\infty[$
La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$.
La fonction affine $x \longmapsto ax + b$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$.

Exemple : Montrer que $x \geq e \Rightarrow \frac{1}{\ln(x) + 3} \leq \frac{1}{4}$

$x \geq e \quad \ln(x) \geq \ln(e)$ (ln $\uparrow$) $\ln(x) + 3 \geq 4$ (>0) $\frac{1}{\ln(x)+3} \leq \frac{1}{4}$ (fonction inv $\downarrow$ sur $]0;+\infty[$)

Remarque : Pour montrer une implication du type : "si $x \geq A$ alors $f(x) \geq f(A)$"
_ soit x n'apparaît qu'une seule fois dans l'expression : en général, on peut passer de x à f(x) par étapes à l'aide des fonctions usuelles
_ si x apparaît plus d'une fois, il est souvent nécessaire d'étudier les variations de la fonction f sous-jacente.

Exemple :

On veut montrer que si $x \geq 1$ alors $\dfrac{x+1}{x+2} \geq \dfrac{2}{3}$

(Essai : $x \geq 1 \Rightarrow x + 1 \geq 2$ et $x + 2 \geq 3$. Et alors ?)

Posons $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ sur $[1; +\infty[$ $f'(x) = \dfrac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} \geq 0$ donc f est croissante sur $[1; +\infty[$.

Donc $x \geq 1$

$f(x) \geq f(1)$ (f croissante sur $[1; +\infty[$) $f(x) \geq \dfrac{2}{3}$.

2.3 Inégalités et signes

Pour comparer deux nombres, il est souvent utile de faire la différence des deux membres et d'étudier son signe. ($a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$)

Exemple : Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$

$\dfrac{a^2 + b^2}{2} - ab = \dfrac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} = \dfrac{(a-b)^2}{2} \geq 0$ donc $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

Pour étudier le signe d'une expression, il est souvent utile d'utiliser un tableau de signes. Attention, on peut faire le tableau de signes d'un produit ou d'un quotient, mais jamais d'une somme ! Il faut donc factoriser l'expression au maximum.

Signe d'une expression affine $ax + b$ ($a \neq 0$).

On déterminer la valeur x_0 où l'expression s'annule. On a alors :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax + b		- signe(a)	0	signe(a)	

Exemple : $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$ $\quad -\dfrac{x}{2} + 1 = 0 \quad -\dfrac{x}{2} = -1 \quad x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-\dfrac{x}{2} + 1$		+	0	–	

_ signe d'un polynome du second degré : voir chapitre suivant

_ Pour déterminer le signe d'une expression contenant ln ou exp, il est souvent nécessaire de résoudre une inégalité (attention l'égalité ne suffit pas)

Exemple :

signe de $2 - \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$: $2 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln(x) \geq -2 \Leftrightarrow \ln(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2$

Donc

x	0		e^2		$+\infty$
$2 - \ln(x)$		+	0	–	

_ enfin, pour déterminer montrer une inégalité plus complexe du type : montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$, il peut être utile d'étudier les variations de f (à l'aide de sa dérivée), puis d'en déduire l'inégalité.

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x \Leftrightarrow e^x - 1 - x \geq 0$
Posons $f(x) = e^x - 1 - x$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$
$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln(1) \Leftrightarrow x \geq 0$ $\qquad f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 0 donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ c'est-à-dire $e^x \geq 1 + x$

2.4 Inégalités et valeurs absolues

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Remarque : $|x|$ représente la distance de x à 0. $|x - y|$ représente la distance de x à y.

Ex : $|3| = 3 \quad |-3| = 3$

Propriété : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$, $\quad |-x| = |x|$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} |x + y| \leq |x| + |y| \\ |xy| = |x||y| \\ \text{si } y \neq 0, \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \end{cases}$$

Si $a \geq 0$, $\quad |x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases} \qquad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Ex : Résoudre l'équation $|x + 2| = 7$

$|x + 2| = 7 \Leftrightarrow x + 2 = 7$ ou $x + 2 = -7 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -9$