ECE1 : Correction du Concours blanc n°2

Exercice 1

1. f est continue sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions continues.

$\lim\limits_{t \to 0} t\ln(t) = 0 = f(0)$ (croissances comparées) donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur $[0; +\infty[$.

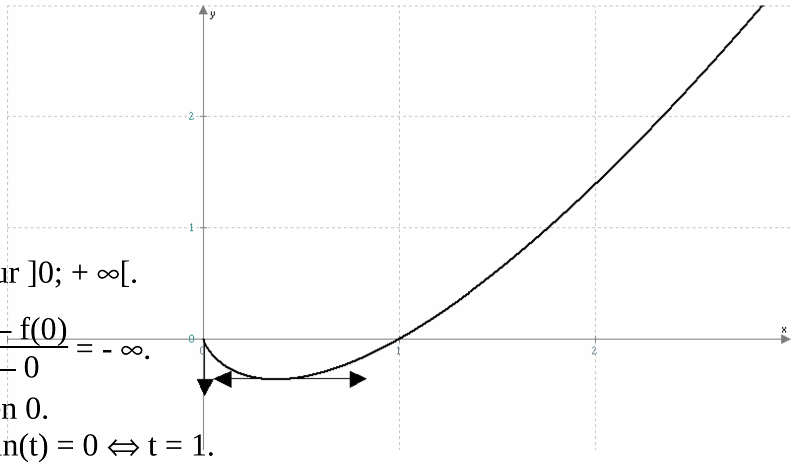
2. f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions C^1 et

$\forall t > 0, f'(t) = 1 \times \ln(t) + t \times \frac{1}{t} = \ln(t) + 1$

3. $\ln(t) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(t) > -1 \Leftrightarrow t > e^{-1} \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$. $\lim\limits_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

t	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$



4. $\forall t > 0, f''(t) = \frac{1}{t} > 0$ donc f est convexe sur $]0; +\infty[$.

5. a) $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t\ln(t)}{t} = \ln(t)$ donc $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = -\infty$.

Donc Γ admet une demi- tangente verticale en 0.

b. $f(0) = 0$ et si $t \neq 0$ $f(t) = 0 \Leftrightarrow t\ln(t) = 0 \Leftrightarrow \ln(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Donc (0;0) et (1;0) sont les points d'intersection avec l'axe des abscisses.

c. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ $\frac{f(t)}{t} = \ln(t)$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$ Donc Γ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

d.

Exercice 2

1) a) Par récurrence : $u_0 = 0$ $0 \le 0 < 1$ donc vrai au rang 0.

Si $0 \le u_n < 1$ $0 \le u_n^2 < 1$ $1 \le u_n^2 + 1 < 2$ $\frac{1}{2} \le \frac{u_n^2 + 1}{2} \le 1$ donc $0 \le u_{n+1} < 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n < 1$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \ge 0$. Donc (u_n) est croissante.

c) (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel L.

L est un point fixe donc $L = \frac{L^2 + 1}{2} \Leftrightarrow 2L = L^2 + 1 \Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \Leftrightarrow (L - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2 + 1}{2} = \frac{1 - u_n^2}{2}$

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\frac{1 - u_n^2}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2}{(1 - u_n)(1 + u_n)} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2 - (1 + u_n)}{(1 - u_n)(1 + u_n)} = \frac{1 - u_n}{(1 - u_n)(1 + u_n)}$$

$= \frac{1}{1 + u_n}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2}$

c) D'après la propriété de l'énoncé $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}\right) = \frac{1}{2}$

Or $\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{j+1}}-\frac{1}{v_j}\right) = \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_{n-1}} + \frac{1}{v_n} - \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_{n-1}}\right)$ (sommes télescopiques)

$= \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1-u_n} - 1 = \frac{u_n}{1-u_n}$ Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n(1-u_n)} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2u_n}{n}}{1-u_n} = 1$ donc $1 - u_n \sim_{+\infty} \frac{2u_n}{n} \sim_{+\infty} \frac{2}{n}$ car $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. $u_n - 1 \sim_{+\infty} -\frac{2}{n}$

Exercice 3

1.$(B-\lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x + 2y = 0 \\ x + (3-\lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (3-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)x + 2y = 0 \end{cases}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (3-\lambda)y = 0 \\ ((3-\lambda)(2-\lambda)-2)y = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow (2-\lambda)L_1 - L_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + (3-\lambda)y = 0 \\ (\lambda^2 - 5\lambda + 4)y = 0 \end{cases}$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$ (1 racine évidente). Le système n'est pas de Cramer pour $\lambda = 1$ et 4.

Pour $\lambda = 1$: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y$ $S_1 = \left\{\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Le vecteur est non nul, donc forme une base de S_1.

Pour $\lambda = 4$: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$ $S_4 = \left\{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Le vecteur est non nul, donc forme une base de S_4

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$ $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$

donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ $5D - 4I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ donc $D^2 = 5D - 4I$.

Donc $B^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = P(5D-4I)P^{-1} = 5PDP^{-1} - 4PIP^{-1} = 5B - 4I$.

4. $B^2 - 5B = -4I$ $B(B-5I) = -4I$ $B\left(-\frac{1}{4}B + \frac{5}{4}I\right)B = I$ donc B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{4}B + \frac{5}{4}I$.

Partie II 1. $\forall M \in M_2(\mathbb{R})$, $\forall M' \in M_2(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$h(M + M') = A(M + M')B = (AM + AM')B = AMB + AM'B = h(M) + h(M')$

$h(\lambda M) = A(\lambda M)B = \lambda(AMB) = \lambda h(M)$ donc h est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. A est inversible (diagonale avec coefficients diagonaux non nuls)

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$, $M' \in M_2(\mathbb{R})$ $h(M) = M' \Leftrightarrow AMB = M'$

$\Leftrightarrow A^{-1}AMBB^{-1} = A^{-1}M'B$ ($\times A^{-1}$ à gauche, $\times B^{-1}$ à droite).

$\Leftrightarrow M = A^{-1}M'B^{-1}$ donc h est bijectif et $h^{-1}(M) = A^{-1}MB^{-1}$.

3. a) $h(M) = \lambda M \Leftrightarrow AMB = \lambda M \Leftrightarrow AMPDP^{-1} = \lambda M$

$\Leftrightarrow AMPD = \lambda MP$ ($\times P$ à droite) $\Leftrightarrow AND = \lambda N$

b) Si $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -z & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t \end{pmatrix}$

$AN = \lambda N \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ 4y = \lambda y \\ -z = \lambda z \\ -4t = \lambda t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (4-\lambda)y = 0 \\ (-1-\lambda)z = 0 \\ (-4-\lambda)t = 0 \end{cases}$

Ce système homogène n'est pas de Cramer (et donc admet des solutions non nulles) pour $\lambda = 1, 4, -1, -4$.

c. $N = MP \Leftrightarrow NP^{-1} = M$

$h(M) = \lambda M$ a une solution non nulle si et seulement si $AND = \lambda N$ admet une solution non nulle, donc pour $\lambda = 1, 4, -1, -4$.

Pour $\lambda = -1$ on a : $\begin{cases} 2x = 0 \\ 5y = 0 \\ 0 = 0 \\ 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$

$M = NP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2y & -2y \end{pmatrix}$

Exercice 4

1) a) pour $1 \le k \le n - 1$ $(T_n = k) = F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$

donc $P(T_n = k) = q^{k-1}p$ (lancers indépendants)

b) $(T_n = n) = (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap F_n)$

donc $P(T_n = n) = q^{n-1}p + q^n = q^{n-1}(p + q) = q^{n-1}$.

c) $\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} P(T_n = k) + P(T_n = n) = \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}p + q^{n-1}$

(avec $k' = k - 1$) $= p\sum_{k'=0}^{n-2} q^{k'} + q^{n-1} = p \times \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + q^{n-1} = p\,\frac{1 - q^{n-1}}{p} + q^{n-1} = 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1.$

d) Par récurrence sur n :

_ Pour n = 1 : $\sum_{k=1}^{1} kq^{h-1} = 1q^0 = 1$ $\quad \frac{1 - (1 + 1)q^1 + 1q^2}{(1 - q)^2} = \frac{1 - 2q + q^2}{(1 - q)^2} = \frac{(1 - q)^2}{(1 - q)^2} = 1$ vrai pour 1

_ supposons que : $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1 - (n + 1)q^n + nq^{n+1}}{(1 - q)^2}$

Alors $\sum_{k=1}^{n+1} kq^{k-1} = \frac{1 - (n + 1)q^n + nq^{n+1}}{(1 - q)^2} + (n + 1)q^n = \frac{1 - (n + 1)q^n + nq^{n+1} + (n + 1)q^n(1 - q)^2}{(1 + q)^2}$

$= \frac{1 - (n + 1)q^n + nq^{n+1} + (n + 1)q^n(1 - 2q + q^2)}{(1 - q)^2} = \frac{1 + (n - 2(n + 1))q^{n+1} + (n + 1)q^{n+2}}{(1 - q)^2}$

$= \frac{1 - (n + 2)q^{n+1} + (n + 1)q^{n+2}}{(1 - q)^2}$ donc héréditaire.

Conclusion : $\forall\, n \ge 1,\ \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1 - (n + 1)q^n + nq^{n+1}}{(1 - q)^2}$

OU : on sait que $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{1\}$ $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

En dérivant cette relation, on obtient : $\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{- (n + 1)x^n(1 - x) - (1 - x^{n+1})(-1)}{(1 - x)^2}$

$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1 - (n + 1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}$

d) $T_n(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ donc T_n admet une espérance et $E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)$

$= \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p + nq^{n-1} = p\,\frac{1 - nq^{n-1} + (n - 1)q^n}{(1 - q)^2} + \frac{nq^{n-1}(1 - q)}{(1 - q)}$

$= \frac{1 - nq^{n-1} + (n - 1)q^n + nq^{n-1} - nq^n}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

2) a) $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ $(X_n = 0) = F_1 \cap \ldots \cap F_n$ donc $P(X_n = 0) = q^n$
$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - q^n$
b) $X_n \longrightarrow B(1 - q^n)$ donc $E(X_n) = 1 - q^n$ (OU $E(X_n) = 0 \times q^n + 1 \times (1 - q^n) = 1 - q^n$.
3) a) $\forall\, k \in \{0, n - 1\}$ $(Y_n = k) = F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}$ donc $P(Y_n = k) = q^k p$
b) $(Y_n = n) = F_1 \cap \ldots \cap F_n$ donc $P(Y_n = n) = q^n$.
c) $T_n = X_n + Y_n$ donc par linéarité $E(T_n) = E(X_n) + E(Y_n)$
$E(Y_n) = \dfrac{1 - q^n}{1 - q} - (1 - q^n) = (1 - q^n)\left(\dfrac{1}{1 - q} - 1\right) = (1 - q^n)\dfrac{1 - (1 - q)}{1 - q} = \dfrac{q(1 - q^n)}{1 - q}$

4)

```
while (x = 0) and (t < n) do begin t:=t+1;
                                   If random>p then y:=y+1
                                               else x:=x+1;    end;
```

Exercice 5

1. X est le jour du premier contrôle négatif. La probabilité d'avoir un contrôle négatif est 2/5.
Les résultats des contrôles sont indépendants. Donc $X \longrightarrow G(2/5)$.
$X(\Omega) = \{1, 2, \ldots\}$ $P(X = k) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{k-1}\dfrac{2}{5}$ $E(X) = \dfrac{1}{2/5} = \dfrac{5}{2}$ $V(X) = \dfrac{1 - 2/5}{(2/5)^2} = \dfrac{3/5}{4/25} = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{25}{4} = \dfrac{15}{4}$

2. a) $Y(\Omega) = \{2,3, \ldots\}$ $(X = 3) \cap (Y = 5) = P_1 \cap P_2 \cap N_3 \cap P_4 \cap N_5$
Donc $P((X = 3) \cap (Y = 5)) = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{72}{5^5}$

b) si $i < j$ $(X = i) \cap (Y = j) = P_1 \cap \ldots \cap P_{i-1} \cap N_i \cap P_{i+1} \cap \ldots \cap P_{j-1} \cap N_j$
$i - 1$ contrôles positifs avant le premier négatif $(j - 1) - (i + 1) + 1 = j - i - 1$ contrôles positifs entre les deux négatifs. Donc $P((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{i-1}\times\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{j-i-1}\times\dfrac{1}{5}$
Si $i \geq j$, $(X = i) \cap (Y = j)$ est impossible, donc $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$

c) $\forall\, j \geq 2$, $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{j-i-1}\times\frac{1}{5}$ (nul si $i \geq j$)
Posons $i' = i - 1$ $(i = i' + 1)$
$$P(Y = j) = \sum_{i'=0}^{j-2}\frac{2}{25}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{i'}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{j-i'-2} = \frac{2}{25}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{j-2}\times\sum_{i'=0}^{j-2}\left(\frac{3}{5}\right)^{i'}\times\left(\frac{5}{4}\right)^{i'} = \frac{2}{25}\times\frac{25}{16}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\times\sum_{i'=0}^{j-2}\left(\frac{3}{4}\right)^{i'}$$
$$= \frac{1}{8}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{j}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{j} - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{j}$$

d) $P((X = 2) \cap (Y = 2)) = 0$ et $P(X = 2) = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{25}$ $P(Y = 2) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$
$= \dfrac{8}{25} - \dfrac{6}{25} = \dfrac{2}{25}$ donc $P((X = 2) \cap (Y = 2)) \neq P(X = 2)P(Y = 2)$.
X et Y ne sont pas indépendantes.

d) $\displaystyle\sum_{j\geq 2} jP(Y = j) = \frac{1}{2}\sum_{j\geq 2} j\left(\frac{4}{5}\right)^{j} - \frac{2}{3}\sum_{j\geq 2} j\left(\frac{3}{5}\right)^{j} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\sum_{j\geq 2} j\left(\frac{4}{5}\right)^{j-1} - \frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\sum_{j\geq 2} j\left(\frac{3}{5}\right)^{j-1}$
$0 < \dfrac{3}{5} < \dfrac{4}{5} < 1$ donc les séries convergent absolument. Donc Y admet une espérance et
$E(Y) = \dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{(1 - 4/5)^2} - 1\right) - \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{(1 - 3/5)^2} - 1\right) = \dfrac{2}{5}\times 25 - \dfrac{2}{5}\times\dfrac{25}{4} = 10 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{2}$.
Ou : Soit Z le nombre de jours après le premier test négatif jusqu'au deuxième
Z est le rang du premier test négatif (probabilité 1/5) et les tests sont indépendants.
Donc $Z \longrightarrow G(1/5)$ et $E(Z) = 1/1/5 = 5$ Or $Y = X + Z$ donc $E(Y) = E(X) + E(Z) = \dfrac{5}{2} + 5 = \dfrac{15}{2}$