ECE1

Concours Blanc n°1

Vendredi 16 Décembre 2011

Durée : 4 heures

Les calculatrices et les portables restent au chaud dans le sac.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 - Ecricome 2007 (5 points)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par : $f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$
ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_a(u_n)$.

1. Etude des variations de la fonction f_a.

Donner I'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser le tableau de variation de f_a. En déduire que : $\forall t > 0, f_a(t) \geq a$.

2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_o = a$?

Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$

b) Montrer que pour tout entier n, non nul : $u_n \geq a$.

c) Montrer que pour tout entier n non nul : $u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$.

d) Prouver que pour tout entier n non nul : $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.

e) En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

f) En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

Exercice 2 (5 points)
On dispose d'un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence. On sait que 50 de ces pièces sont équilibrées tandis que les 50 autres sont truquées. Pour une pièce truquée, la probabilité d'apparition de "pile" lors d'un jet de cette pièce vaut 3/4.
On suppose que, pour une pièce donnée, les différents lancers sont indépendants les uns des autres.

1. On choisit une pièce au hasard et on la lance deux fois.
On note P_1 : "on fait pile au premier lancer", et P_2 : "on fait pile au deuxième lancer".
a) Déterminer $P(P_1)$ et $P(P_2)$.
b) Les événements P_1 et P_2 sont-ils indépendants ?

2. a) On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance. Le résultat de ce jet est "pile".
Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?
Quelle est la probabilité d'obtenir "Pile" au prochain lancer ?
b) On relance cette même pièce et on obtient à nouveau "pile". Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?

3. On désire effectuer un tri des pièces pour tenter d'éliminer celles qui sont truquées. Pour cela on prend les pièces du lot une à une et on lance chaque pièce deux fois.
• Si au cours des deux lancers on obtient au moins un "pile", on décide d'éliminer la pièce.
• Dans le cas contraire, on la conserve.
Quelle est la probabilité d'éliminer une pièce quand elle est équilibrée ? Quelle est la probabilité de conserver une pièce quand elle est truquée ? Interpréter ces résultats.

4. Dans cette question, on choisit la pièce truquée.
Soit $N \geq 1$. On lance N fois cette pièce.
Pour $k \in \{1, \ldots, N\}$, on note A_k l'événement "Le premier pile arrive au k-ème lancer"
On note B l'événement "Il n'y a aucun pile".
a) Déterminer $P(A_k)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$
b) Déterminer P(B).
c) Déterminer $\sum_{k=1}^{N} P(A_k)$. Vérifier la cohérence de vos résultats.

Exercice 3 - ESC 2005 (4,5 points)

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.
On appelle " épreuve " la séquence suivante :
On tire une boule de l'urne, puis :

- Si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.
Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n - ième épreuve.

On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :

R_k: " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule rouge de l'urne. "
B_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule bleue de l'urne. "

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.
2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?
3. Calculer pour tout entier naturel non nul n, $P(Y_n = 2)$.
4. On pose pour tout entier naturel non nul n, $u_n = P(Y_n = 1)$.

a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \frac{2}{3}$.

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable Y_n, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.

Cette relation reste-t-elle valable lorsque n = 1 ?

c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = 3^n \times u_n$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.
En déduire que pour tout entier n non nul, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$.
Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n .

Exercice 4 (1,5 points)

Soit $N \geq 1$. On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.
On tire 3 boules successivement et sans remise dans cette urne.
Soit X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres obtenus.
1) Pour $k \in \{0, \dots, N-2\}$, déterminer $P(X > k)$.
b) Pour $k \in \{1, \dots, N-2\}$. exprimer $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k)$ et $P(X > k-1)$.
En déduire la loi de X.

Exercice 5 - HEC 2009 (4 points)
Dans tout l'exercice, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
b) La suite est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, a et b (a > b) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$

2. a) Montrer que : $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant : $1 < a < 2$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$

c) En déduire un équivalent de u lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_{n+2} - 1$

Hors barème :
4. On propose le programme Pascal suivant :
```
program hec09;
var n, temp, u, v , k : integer ;
Begin
writeln('Donner la valeur de n');
readln(n);
u := 0 ; v :=1 ;
for k :=1 to n – 1 do
Begin
  temp := _____; v := _____; u := _____;
end ;
writeln('u(',n,' ) vaut ', _____);
end .
```
Compléter ce programme aux quatre places signalées par des tirets de façon que la valeur rendue soit u_n.

Joyeux Noël !