**ECE1 : Correction du Concours blanc n°1**

**Exercice 1** 1$f_a'(t) = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2t^2} = \frac{t^2 - a^2}{2t^2}$ $t^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq a^2 \Leftrightarrow t \geq a$ (car $t > 0$, $a > 0$)

| $t$ | $0$      $a$      $+\infty$ |
|---|---|
| $f_a'(t)$ | $-$    $0$    $+$ |
| $f_a(t)$ | $\searrow$   $a$   $\nearrow$ |

Le minimum de f sur $]0; +\infty[$ est a donc $f_a(t) \geq a$ $\forall$ $t > 0$.

2.a) Si $u_0 = a$ $u_1 = f_a(a) = a$, etc… la suite est constante.

b) Par récurrence :

_ pour $n = 1$, $u_1 = f(u_0) \geq a$ d'après la question 1.

_ supposons que $u_n \geq a$ alors $f(u_n) \geq$ a d'après la question 1. (ou car f est croiss. sur $[a; +\infty[$)

Donc $u_{n+1} \geq a$. Conclusion : $\forall$ $n \geq 1$, $u_n \geq a$.

c) $u_{n+1} - a - \frac{1}{2}(u_n - a) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a^2}{u_n}\right) - a - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}a = \frac{a^2}{2u_n} - \frac{a}{2} = \frac{a(a - u_n)}{2u_n} \leq 0$ car $u_n \geq a$.

Donc $u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$. $\forall$ $n \geq 1$.

c) Remarque : comme $u_n \geq a$, $|u_n - a| = u_n - a$.

Montrons par récurrence que $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$

_ pour n = 1 : $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}|u_1 - a| = |u_1 - a|$ donc la propriété est vraie.

_ si $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$

$|u_{n+1} - a| = u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$

$|u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}|u_1 - a|$ donc la propriété est héréditaire.

Donc pour tout $n \geq 1$, $0 \leq |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$

d) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a| = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$) donc d'après le théorème des gendarmes;

$\lim_{n \to +\infty} |u_n - a| = 0$. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$.

e) En prenant $a = \sqrt{2}$, on obtient $f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t}\right)$.

```
program cb1;
var i:integer;u:real;
begin
        u:=1;
        for i:=1 to 100 do
                begin  u:=(u+2/u)/2;
                        writeln('u (',i,') vaut ',u);
                end;
        readln;end.
```

**Exercice 2**

1. On note T = "la pièce est truquée" et E = "La pièce est équilibrée".
(E, T) forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(P_1) = P(T)P_T(P_1) + P(E)P_E(P_1) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

$P(P_2) = P(T)P_T(P_2) + P(E)P_E(P_2) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

$P(P_1 \cap P_2) = P(T)P_T(P_1 \cap P_2) + P(E)P_E(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{13}{32}$

$P(P_1) \times P(P_2) = \frac{5}{8}\times\frac{5}{8} = \frac{25}{64} \neq P(P_1 \cap P_2)$ donc $P_1$ et $P_2$ ne sont pas indépendants.

2. a. D'après la formule de Bayes :

$P_{P1}(T) = \frac{P(T)P_T(P_1)}{P(P_1)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$.   $P_{P1}(P_2) = \frac{P(P_1 \cap P_2)}{P(P_1)} = \frac{\frac{13}{32}}{\frac{5}{8}} = \frac{13\times 8}{5\times 32} = \frac{13}{20}$.

b. De la même manière $P_{P1\cap P2}(T) = \frac{P(T)P_T(P_1 \cap P_2)}{P(P_1 \cap P_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{13}{32}} = \frac{\frac{9}{32}}{\frac{13}{32}} = \frac{9}{13}$

3. probabilité d'éliminer une pièce truquée : $P_E(\overline{F_1 \cap F_2}) = 1 - P_E(F_1 \cap F_2) = \frac{3}{4}$

Probabilité de conserver une pièce quand elle est truquée : $P_T(F_1 \cap F_2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Donc on élimine beaucoup de bonnes pièces, mais on conserve très peu de pièces truquées.

4. a) $\forall\, k \in \{1, \dots, N\} \quad A_k = F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$

Les lancers sont indépendants, donc $P(A_k) = P(F_1) \times \dots \times P(F_{k-1}) \times P(P_k) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\frac{3}{4}$

b) $B = F_1 \cap \dots \cap F_N$ (indépendants) donc $P(B) = \frac{1}{3^N}$

c) $\sum_{k=1}^{N} P(A_k) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\frac{3}{4}$ (avec $k' = k - 1$) $= \frac{3}{4}\times\sum_{k'=0}^{N-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k'} = \frac{3}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^N}{1-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4^N}$

Cohérence : $(A_1, \dots, A_N, B)$ forment un système complet d'événements.

Donc $\sum_{k=1}^{N} P(A_k) + P(B)$ doit être égal à 1.

Or $\sum_{k=1}^{N} P(A_k) + P(B) = 1 - \frac{1}{4^N} + \frac{1}{4^N} = 1$   le résultat est cohérent.

**Exercice 3**

1. $Y_1(\Omega) = \{1,2\}$ $(Y_1 = 1) = R_1$ $(Y_1 = 2) = B_1$ donc $P(Y_1 = 1) = \dfrac{2}{3}$ $P(Y_1 = 2) = \dfrac{1}{3}$

2. Pour $n \geq 2$, $Y_n(\Omega) = \{0,1,2\}$.

3. $(Y_n = 2) = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$ donc $P(Y_n = 2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

4. a) $u_1 = P(Y_1 = 1) = \dfrac{2}{3}$

D'après la formule des probabilités totales,
$u_2 = P(Y_2 = 1) = P(Y_1 = 1)P_{(Y1 = 1)}(Y_2 = 1) + P(Y_1 = 2)P_{(Y1 = 2)}(Y_2 = 1)$
$= \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$

b) De même, d'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(Y_n = 0, Y_n = 1, Y_n = 2)$ $u_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1)$
$= P(Y_n = 0)P_{(Yn = 0)}(Y_{n+1} = 1) + P(Y_n = 1)P_{(Yn = 1)}(Y_{n+1} = 1) + P(Y_n = 2)P_{(Yn = 2)}(X_{n+1} = 1)$
$= P(Y_n = 0) \times 0 + P(Y_n = 1) \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3^n}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$

Pour $n = 1$ : $u_{1+1} = u_2 = \dfrac{2}{3}$ $\dfrac{2}{3}u_1 + \dfrac{2}{3^{1+1}} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ la relation est valable pour n=1.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 3^{n+1}u_{n+1} = 3^{n+1}\left(\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}\right) = 2\times 3^n u_n + 2 = 2v_n + 2$.

Donc $(v_n)$ est une suite arithmético-géométrique.
Point fixe : $c = 2c + 2 \Leftrightarrow -c = 2 \Leftrightarrow c = -2$
Donc la suite $w_n = v_n + 2$ est géométrique de raison 2.

$\forall\, n \geq 1$, $w_n = w_1 \times q^{n-1}$ $v_1 = 3^1 \times u_1 = 3 \times \dfrac{2}{3} = 2$. $w_1 = v_1 + 2 = 4$

$v_n + 2 = 2^{n-1} \times 4$ $v_n = 2 \times 2^n - 2$

$u_n = \dfrac{v_n}{3^n} = 2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3^n} = \dfrac{2^{n+1} - 2}{3^n}$ donc $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$

(d) $P(Y_n = 0) + P(Y_n = 1) + P(Y_n = 2) = 1$ (système complet d'événements).

Donc $P(Y_n = 0) = 1 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{2}{3^n} - \dfrac{1}{3^n} = 1 + \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.

**Exercice 4**

1) On tire 3 boules successivement, sans remise donc $\text{card}(\Omega) = A_N^3 = N(N-1)(N-2)$.
$\forall\, k \in \{2, \ldots, N\}$, $(X > k)$ = " Les deux nombres obtenus sont strictement supérieurs à k"
Il y a $N - k$ boules entre $k + 1$ et $N$.
Donc $\text{card}(X > k) = A_{N-k}^3 = (N-k)(N-k-1)(N-k-2)$

$P(X > k) = \dfrac{(N-k)(N-k-1)(N-k-2)}{N(N-1)(N-2)}$

2) $\forall\, k \in \{1, \ldots, N-2\}$, $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$. (schéma)

$= \dfrac{(N-k+1)(N-k)(N-k-1) - (N-k)(N-k-1)(N-k-2)}{N(N-1)(N-2)}$

$= \dfrac{(N-k+1-N+k+2)(N-k)(N-k-1)}{N(N-1)(N-2)} = \dfrac{3(N-k)(N-k-1)}{N(N-1)(N-2)}$

**Exercice 5**

1) a) On procède par récurrence à deux rangs pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$.

_ $u_0 = 0 \in \mathbb{N}$ $u_1 = 1 \in \mathbb{N}$

_ supposons que $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$. Alors $u_n + u_{n+1} \in \mathbb{N}$. Donc $u_{n+2} \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$.

Donc $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n \geq 0$ donc la suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang 1. Comme $u_0 \leq u_1$, elle est croissante à partir de 0.

b) Si $(u_n)$ converge vers un réel L, comme $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, on aurait $L = L + L \Leftrightarrow L = 0$.

Or $u_1 = 1$ et $(u_n)$ est croissante, donc c'est impossible. Donc la suite est divergente.

2) $\Delta = 5$ deux racines $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$1 - a = \dfrac{2-1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = b$ $\quad -\dfrac{1}{a} = -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = -\dfrac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$ (forme conjuguée)

$= \dfrac{-2+2\sqrt{5}}{1-5} = \dfrac{2-2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = b$

$4 < 5 < 9$ donc $2 < \sqrt{5} < 3$ $\quad 3 < 1 + \sqrt{5} < 4$ $\quad \dfrac{3}{2} < a < 2$ donc $1 < a < 2$.

b) $(u_n)$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$, de solutions a et b.

Donc il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que : $u_n = \lambda a^n + \mu b^n$

$$\begin{cases} u_0 = \lambda a^0 + \mu b^0 = 0 \\ u_1 = \lambda a^1 + \mu b^1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ a\lambda + b\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ (a-b)\lambda = 1 \end{cases}$$

Or $a - b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ donc $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$

c) $u_n = \dfrac{a^n}{\sqrt{5}}\left(1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)$ et $-1 < \dfrac{b}{a} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = 0$ donc $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{a^n}{\sqrt{5}}$.

3) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1}) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{k+2} - \sum\limits_{k=0}^{n} u_{k+1}$

$= (u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2}) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1}) = u_{n+2} - u_1 = u_{n+2} - 1$.

Ou : Par récurrence :

_ pour $n = 0$ $S_0 = \sum\limits_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 0$ $\quad u_2 - 1 = 1 - 1 = 0$ $\quad$ vrai au rang 0.

_ Supposons que $S_n = u_{n+2} - 1$ alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} - 1 = u_{n+3} - 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_{n+2} - 1$.

Ou : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^k - b^k) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a^k - \sum\limits_{k=0}^{n} b^k\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} - \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}\right)$

Or $\dfrac{1}{1-a} = \dfrac{1}{b} = -a$ et $\dfrac{1}{1-b} = \dfrac{1}{a} - -b$

Donc $S_n = \dfrac{-a(1-a^{n+1}) + b(1-b^{n+1})}{\sqrt{5}} = \dfrac{b-a}{\sqrt{5}} + \dfrac{a^{n+2} - b^{n+2}}{\sqrt{5}} = -1 + u_{n+2}$

4) Begin

temp := **v**; v := **u + v**; u := **temp**;

end ;

writeln('u(',n,' ) vaut ', **v**);